

O MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS APLICADO À TEORIA DAS VIGAS

*Selênio Feio da Silva**
*Alexandre Andrade Brandão Soares***

RESUMO

No presente trabalho, aplica-se o Método das Diferenças Finitas e os seus operadores advindos da expansão em série de Taylor, para posteriormente aplicá-los em alguns exemplos de viga, supondo que a mesma se enquadra na Teoria de Euler para o comportamento estático. Tem-se como objetivo calcular as flechas adimensionais em uma viga biapoada, em uma viga engastada-livre e em uma viga biengastada.

Palavras-chave: Método das Diferenças Finitas. Viga de Euler. Método da Integração Dupla.

THE METHOD OF FINITE DIFFERENCES APPLIED TO THE THEORY OF BEAMS

ABSTRACT

In the present work, shows the Method of Finite Difference and their operators coming from the Taylor expansion series, and later apply them to some examples of the beams, assuming that it fits with the theory of Euler for the static behavior. It has the objective to calculate the dimensionless arrows in a beam bi-supported, in a beam clamped-free and in a bi-clamped beam.

Keyword: *Finite Difference Method. Euler beam. Double Integration Method.*

1 INTRODUÇÃO

1.1 GENERALIDADES

A falta de um estudo no campo numérico na graduação em Engenharia Civil torna-se, a cada dia, uma necessidade, uma vez que o graduando não tem familiaridade com a ferramenta matemática. Além de que, o Engenheiro Civil precisa entender como os softwares realizam seus processos de cálculo, em especial na área da Engenharia Estrutural, onde simplificações matemáticas e a solução de problemas, que muitas das vezes não tem soluções analíticas (exatas), são comuns de ocorrerem. Vale ressaltar que estudos numéricos já vêm acontecendo em centros avançados de pesquisas, no Brasil e no Mundo.

* Graduado em Engenharia Civil – UFPA; Mestrado em Estruturas – UnB; Doutorado em Estruturas e Construção Civil – UnB. Professor Titular da Universidade da Amazônia – UNAMA.

** Acadêmico do Curso de Graduação em Engenharia Civil – UNAMA; Pesquisador de Iniciação Científica (UNAMA).

Apesar de os métodos numéricos serem aproximados, dependendo do nível de aproximação dado pelo operador, podem ser tão precisos quanto se queira. Existem estruturas que são complexas para serem analisadas pelas técnicas das teorias clássicas (soluções analíticas), portanto esse tipo de solução analítica se torna em alguns casos impossível de calcular sem que haja grandes e excessivas simplificações, resultando em valores pouco apurados.

Os métodos analíticos clássicos permitem o cálculo da resposta exata, como por exemplo, das flechas, deformações e tensões em todos os pontos de uma estrutura que apresente uma problematização "simples". Neste contexto se insere a questão central que motiva o estudo do Método das Diferenças Finitas (MDF), pois ele não se restringe a problemas específicos e/ou particularizados.

O MDF e, de modo geral, os métodos numéricos, permitem observações importantes em termos computacionais para matrizes de coeficientes que serão produzidas quando o MDF for empregado. Para a programação de um software os métodos numéricos são importantes, pois como já dito, não se restringem a nenhum caso particular, podendo assim ser empregados de forma segura e precisa, dependendo do grau de refinamento do cálculo.

As equações diferenciais que regem esses fenômenos são muitas vezes complicadas e, em geral, não lineares. Segundo SOUSA (2006), torna-se necessário utilizar procedimentos numéricos para montar soluções na forma de equações algébricas.

As soluções numéricas estão relacionadas diretamente com os métodos computacionais, estas soluções ganharam grande "espaço" na prática e no próprio meio acadêmico após o advento dos computadores. Sem dúvida tais soluções apresentam inúmeras vantagens sobre as demais. Em relação à solução analítica, já não exige problemas relativamente simples com tantas particularidades; e em relação à solução experimental o tempo e o custo são consideravelmente reduzidos.

1.2 O MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS

A solução de uma equação diferencial em um domínio implica no conhecimento dos valores das variáveis estudadas, em todo o meio contínuo. Para isso, o MDF consiste em resolver a equação diferencial em pontos discretos. Estes pontos são igualmente espaçados, ou seja, a malha é regular (SOUSA, 2006).

Para transformação das equações diferenciais em formas discretizadas e, posteriormente, em um sistema de equações algébricas, em função dos valores da variável em cada nó, é preciso aproximar as derivadas. Em resumo, o uso da técnica de Diferenças Finitas procura escrever os operadores diferenciais em sua forma discreta, ou seja, em função de valores pontuais da solução. O conhecimento da solução, mesmo que de forma aproximada, em alguns pontos dá uma boa ideia da solução contínua, à medida que essa nuvem de pontos é adensada o valor da resposta numérica se aproxima do valor real (SILVA, 2008).

1.3 OBJETIVOS

Os objetivos deste estudo são:

- apresentar a equação que rege o comportamento estático das vigas, pela teoria das vigas de Euler, em função dos operadores de Diferenças Finitas;
- obter as condições de contorno nos vínculos dos apoios da viga, de modo a levar os problemas relacionados a um sistema possível determinado;
- aplicar o método das diferenças finitas na equação da viga de Euler, para estudos de caso no comportamento estático;
- calcular os valores das flechas em vigas através da aplicação do Método das Diferenças Finitas na teoria da viga de Euler, utilizando diferentes malhas a fim de que se perceba a convergência para a solução.

2 FORMULAÇÃO BÁSICA DO MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS (MDF)

Este método utiliza como técnica de solução de equações diferenciais a substituição das derivadas por formas de diferenças finitas, que são obtidas pela expansão em série de Taylor e truncamento ao nível da ordem do erro desejada (SILVA; PEDROSO, 2005).

2.1 SÉRIE DE TAYLOR PARA FUNÇÕES DE UMA VARIÁVEL

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)(x-a)^2}{2!} + \dots + \frac{f^{(n-1)}(a)(x-a)^{n-1}}{(n-1)!} + R_n \quad (1)$$

O resto após n termos, R_n , é dado por qualquer das formas seguintes:

a) Forma de Lagrange:

$$R_n = \frac{f^{(n)}(\xi)(x-a)^n}{(n)!} \quad (2)$$

(2)

b) Forma de Cauchy:

$$R_n = \frac{f^{(n)}(\xi)(x-\xi)^{n-1}(x-a)}{(n-1)!} \quad (3)$$

O valor x , que pode ser diferente nas duas formas, fica entre a e x . O resultado determina se $f(x)$ tem derivadas contínuas de ordem n pelo menos. A série é infinita, se $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = 0$, e é chamada de série de Taylor para $f(x)$ em $x = a$. Se $x = 0$, a série é freqüentemente chamada de série de Maclaurin. Essas séries, chamadas de séries de potências, convergem para todos os valores de x em algum intervalo de convergência e divergem para todos os valores de x fora desse intervalo (SILVA, 2008).

2.2 APROXIMAÇÃO DAS DERIVADAS POR SÉRIE DE TAYLOR

A partir da equação (1), pode-se escrever:

$$\begin{aligned} f(x + \Delta x) &= f(x) + \frac{df}{dx} \Delta x + \frac{d^2 f}{dx^2} \frac{(\Delta x)^2}{2!} + \frac{d^3 f}{dx^3} \frac{(\Delta x)^3}{3!} + \dots \\ (4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(x - \Delta x) &= f(x) - \frac{df}{dx} \Delta x + \frac{d^2 f}{dx^2} \frac{(\Delta x)^2}{2!} - \frac{d^3 f}{dx^3} \frac{(\Delta x)^3}{3!} + \dots \\ (5) \end{aligned}$$

Trabalhando com dois termos das séries e operando as equações (4) menos (5):

$$\frac{df}{dx} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x - \Delta x)}{2 \cdot \Delta x} \quad (6)$$

Fazendo $Y = f(x)$ e usando a notação indicial tem-se o operador em diferenças finitas para a primeira derivada:

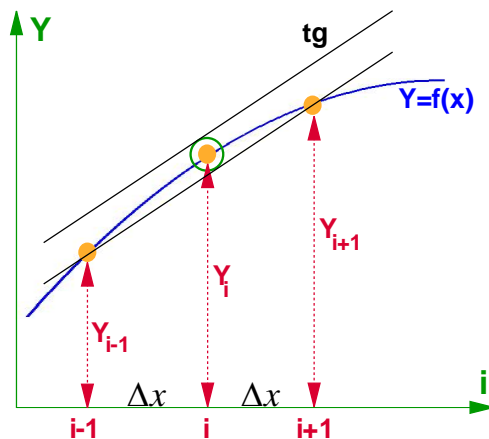
$$\left(\frac{dY}{dx} \right)_i = \frac{Y_{i+1} - Y_{i-1}}{2 \cdot \Delta x} \quad (7)$$

A equação (6) pode ser interpretada geometricamente como segue a Figura 1, uma vez que:

$$f'(x)_i = \left(\frac{dY}{dx} \right)_i = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta Y}{\Delta x} \right)_i \cong \left(\frac{\Delta Y}{\Delta x} \right)_i \quad (8)$$

A equação (7) é conhecida como diferencial central e há, também, a diferencial para frente e a diferencial para trás, definidas a seguir. Vale ressaltar que a diferencial central tem melhor acurácia para a solução exata.

Figura 1 – Interpretação geométrica para a derivada.



a)Diferencial para frente:

$$\left(\frac{dY}{dx}\right)_i = \frac{Y_{i+1} - Y_i}{\Delta x}$$

(9)

b)Diferencial para trás:

$$\left(\frac{dY}{dx}\right)_i = \frac{Y_{i-1} - Y_i}{\Delta x}$$

(10)

O operador em diferenças finitas para a segunda derivada pode ser obtido somando as equações (4) e (5) com os três primeiros termos da série:

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = \frac{f(x + \Delta x) - 2f(x) + f(x - \Delta x)}{(\Delta x)^2} \Leftrightarrow \left(\frac{d^2 Y}{dx^2}\right)_i = \frac{Y_{i+1} - 2Y_i + Y_{i-1}}{(\Delta x)^2}$$

(11)

O operador em diferenças finitas para a terceira derivada pode ser obtido a partir da equação (6), chamando $f(x)$ de $\frac{d^2 f}{dx^2}$:

$$\begin{aligned} \frac{d^3 f}{dx^3} &= \frac{1}{2(\Delta x)^3} [f(x + 2\Delta x) - 2f(x + \Delta x) + 2f(x - \Delta x) - f(x - 2\Delta x)] \\ \Leftrightarrow \left(\frac{d^3 Y}{dx^3}\right)_i &= \frac{1}{2(\Delta x)^3} [Y_{i+2} - 2Y_{i+1} + 2Y_{i-1} - Y_{i-2}] \end{aligned}$$

(12)

O operador em diferenças finitas para a quarta derivada pode ser obtido a partir da equação (11), chamando $f(x)$ de :

(13)

3 REPRESENTAÇÃO DAS CONDIÇÕES DE CONTORNO PARA O MDF

As condições de contorno no método das diferenças finitas têm a função de diminuir o número de variáveis no sistema de equações, através de valores conhecidos naquele ponto da viga, e/ou relacionar pontos fora da viga (nós artificiais da malha de diferenças finitas) a pontos no seu interior, levando sempre a um sistema possível determinado para problemas estáticos.

3.1 CONDIÇÕES NO APOIO DE 3º GÊNERO (ENGASTE)

a) Flecha no engaste é zero: $Y_i = 0$

b) Rotação no engaste é zero: $\left(\frac{dY}{dx}\right)_i = \frac{Y_{i+1} - Y_{i-1}}{2 \cdot \Delta x} = 0 \Rightarrow Y_{i+1} = Y_{i-1}$

3.2 CONDIÇÕES NOS APOIOS DE 1º GÊNERO E DE 2º GÊNERO

a) Flecha no apoio é zero: $Y_i = 0$

b) Momento no apoio é zero: $\left(\frac{d^2Y}{dx^2}\right)_i = \frac{Y_{i+1} - 2Y_i + Y_{i-1}}{(\Delta x)^2} = 0 \Rightarrow Y_{i+1} = -Y_{i-1}$

3.3 CONDIÇÕES NA EXTREMIDADE LIVRE

a) Cortante na extremidade livre é zero: $\left(\frac{d^2Y}{dx^2}\right)_i = \frac{Y_{i+1} - 2Y_i + Y_{i-1}}{(\Delta x)^2} = 0 \Rightarrow Y_{i-1} = 2Y_i - Y_{i+1}$

b) Momento na extremidade livre é zero:

$$\left(\frac{d^3Y}{dx^3}\right)_i = \frac{1}{2(\Delta x)^3} [Y_{i+2} - 2Y_{i+1} + 2Y_{i-1} - Y_{i-2}] = 0 \Rightarrow Y_{i+2} - 2Y_{i+1} + 2Y_{i-1} - Y_{i-2} = 0$$

3.4 CONDIÇÕES NO APOIO DESLIZANTE

a) Rotação no apoio é zero: $\left(\frac{dY}{dx}\right)_i = \frac{Y_{i+1} - Y_{i-1}}{2 \cdot \Delta x} = 0 \Rightarrow Y_{i+1} = Y_{i-1}$

b) Cortante no apoio é zero: $\left(\frac{d^3Y}{dx^3}\right)_i = \frac{1}{2(\Delta x)^3} [Y_{i+2} - 2Y_{i+1} + 2Y_{i-1} - Y_{i-2}] = 0 \Rightarrow Y_{i+2} = Y_{i-2}$

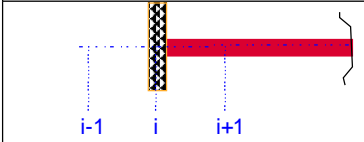
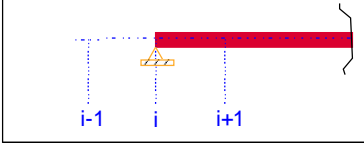
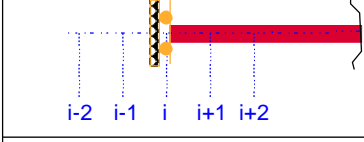
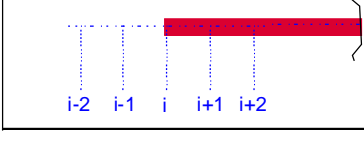
4 ESQUEMA DE SOLUÇÕES

As equações (7), (11), (12) e (13) são representadas esquematicamente na Tabela 1, incluindo seu respectivo 1º termo de erro (\hat{l}_r), medido em Dx . As condições de contorno definidas e deduzidas no item anterior, também são esquematizadas e mostradas na Tabela 2.

Tabela 1 - Representação esquemática para a diferença central.

Operador Aproximado	Célula (coeficientes)	1º termo do erro: ϵ_1
$(d/dx)_i$	$\frac{1}{2(\Delta x)} [-1 \text{---} 0 \text{---} +1]$	$-\frac{1}{6} (\Delta x)^2 Y_i''$
$(d^2/dx^2)_i$	$\frac{1}{(\Delta x)^2} [+1 \text{---} -2 \text{---} +1]$	$-\frac{1}{12} (\Delta x)^2 Y_i^{IV}$
$(d^3/dx^3)_i$	$\frac{1}{2(\Delta x)^3} [-1 \text{---} +2 \text{---} 0 \text{---} -2 \text{---} +1]$	$-\frac{1}{4} (\Delta x)^2 Y_i^{VI}$
$(d^4/dx^4)_i$	$\frac{1}{(\Delta x)^4} [+1 \text{---} -4 \text{---} 6 \text{---} -4 \text{---} +1]$	$-\frac{1}{6} (\Delta x)^2 Y_i^{VI}$

Tabela 2 - Representação das condições de contorno para a diferença central.

Tipo de apoio	Condições de contorno
	$\begin{cases} Y_i = 0 \\ Y_{i+1} = Y_{i-1} \end{cases}$
	$\begin{cases} Y_i = 0 \\ Y_{i+1} = -Y_{i-1} \end{cases}$
	$\begin{cases} Y_{i+1} = Y_{i-1} \\ Y_{i+2} = Y_{i-2} \end{cases}$
	$\begin{cases} Y_{i+1} = 2Y_i - Y_{i-1} \\ Y_{i+2} = 4Y_i - 4Y_{i-1} + Y_{i-2} \end{cases}$

5 APLICAÇÃO DO MÉTODO DAS DIFERENÇAS FINITAS NA VIGA DE EULER

Para uma relação muito pequena, entre a altura da seção transversal de uma viga (h) e seu comprimento (L), defini-se a viga de Euler. Esta se caracteriza por considerar apenas os efeitos de flexão devido à tensão normal, ou seja: os efeitos da tensão de cisalhamento não serão considerados na equação diferencial governante que representará o problema.

A equação diferencial governante para o comportamento estático da viga de Euler submetida a um carregamento $q(x)$ é a seguinte:

$$EI \frac{d^4 v}{dx^4} = q(x)$$

(14)

Dividi-se a equação (14) por (EI) :

$$\frac{d^4 v}{dx^4} = \frac{q(x)}{EI}$$

(15)

Aplica-se o método das diferenças finitas na equação (15), ver Tabela 1:

$$\frac{1}{(\Delta x)^4} [Y_{i-2} - 4Y_{i-1} + 6Y_i - 4Y_{i+1} + Y_{i+2}] = \frac{q(x)}{EI}$$

(16)

Multiplica-se a equação (16) por :

$$Y_{i-2} - 4Y_{i-1} + 6Y_i - 4Y_{i+1} + Y_{i+2} = \lambda; \text{ com } \lambda = \frac{q(x)}{EI} \cdot \Delta x^4$$

(17)

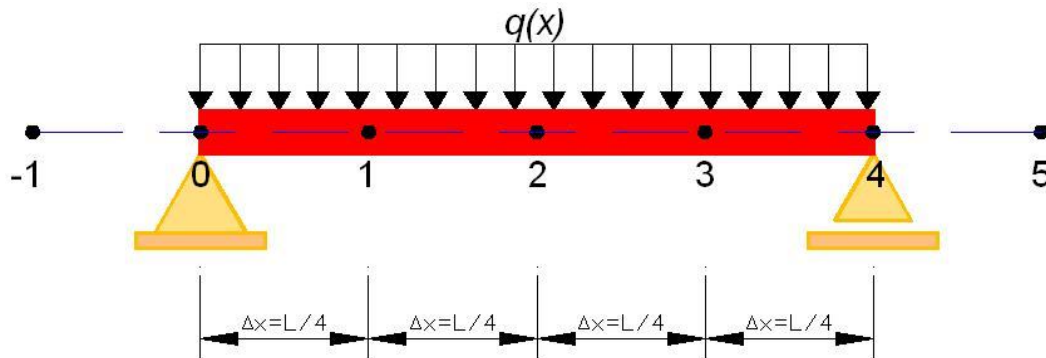
Destaque-se que a equação (17) representa a equação governante para o comportamento estático da viga de Euler por diferenças finitas.

5.1 ESTUDOS DE CASOS

Aplica-se a técnica de resolução por diferenças finitas para a equação de equilíbrio estático da viga de Euler, equação (17). Utilizam-se malhas com diferentes números de nós a fim de se perceber a convergência, com a utilização do MDF, para as soluções analíticas exatas das flechas. Considere uma viga, com módulo de elasticidade E , momento de inércia I e comprimento L , submetida a um carregamento uniformemente distribuído $q(x)$. Objetiva-se calcular as flechas que surgem no vão da viga.

5.1.1 Viga Biapoiada

Figura 2 - Viga biapoiada e discretizada com 5 nós em diferenças finitas (comportamento estático).



- % Deseja-se calcular a flecha no meio do vão ($i=2$).

Substituindo, respectivamente, $i=1$, $i=2$ e $i=3$, na equação (17), resulta em:

$$\begin{cases} Y_{-1} - 4Y_0 + 6Y_1 - 4Y_2 + Y_3 = \lambda \\ Y_0 - 4Y_1 + 6Y_2 - 4Y_3 + Y_4 = \lambda \\ Y_1 - 4Y_2 + 6Y_3 - 4Y_4 + Y_5 = \lambda \end{cases}$$

(18)

Condições de contorno, ver Tabela 2:

$$\text{No apoio de 2}^\circ \text{ gênero } (i=0): \begin{cases} Y_i = 0 \\ Y_{i+1} = -Y_{i-1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Y_0 = 0 \\ Y_1 = -Y_{-1} \end{cases}$$

$$\text{No apoio de 1}^\circ \text{ gênero } (i=4): \begin{cases} Y_i = 0 \\ Y_{i+1} = -Y_{i-1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Y_4 = 0 \\ Y_5 = -Y_3 \end{cases}$$

Substituindo as condições de contorno na equação (18), obtém-se:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 5 & -4 & 1 \\ -4 & 6 & -4 \\ 1 & -4 & 5 \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{bmatrix}}_X = \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda \\ \lambda \\ \lambda \end{bmatrix}}_B$$

(19)

Tem-se, portanto, um sistema de equações do tipo: $AX = B$, a ser resolvido.

A solução deste sistema fornece: $Y_2 = \frac{7}{2} \lambda$. Como $\lambda = \frac{q(x)}{EI} \cdot \Delta x^4$ e uma vez que $\Delta x = \frac{L}{4}$ (ver Figura 2), encontra-se o seguinte valor para a flecha no meio do vão da viga:

$$Y_2 = \frac{7}{512} \frac{qL^4}{EI} \cong 0.0137 \frac{qL^4}{EI}$$

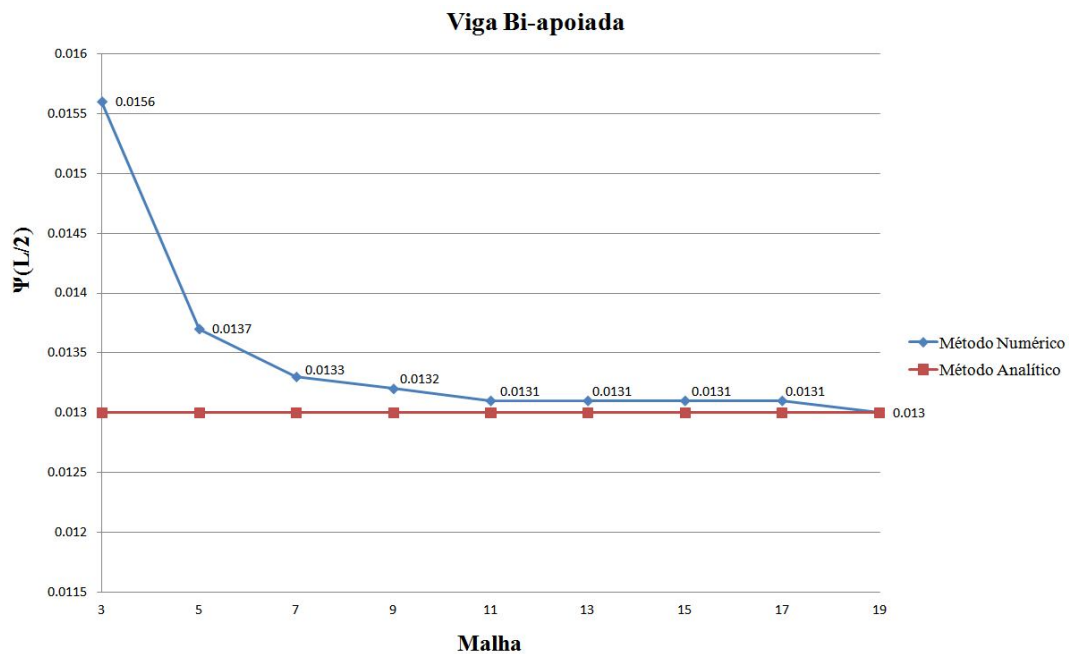
(20)

A solução encontrada, equação (20), representa a flecha no meio do vão desta viga, aproximada na flexão de vigas de Euler pelo método das diferenças finitas. Esta aproximação será melhor à medida que se aumenta o número de nós na malha de diferenças finitas. A Tabela 3, a seguir, mostra a convergência deste método para a solução exata analítica, com malhas em ordem crescente de refinamento (3, 5, 7, 9, 11 e 19 nós na malha de diferenças finitas).

Tabela 3 - Convergência do método das diferenças finitas no cálculo das flechas para viga biapoçada.

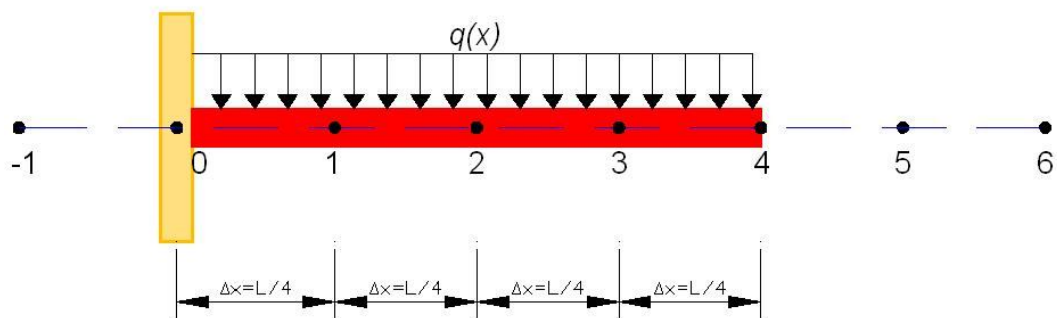
Flechas adimensionais: $\psi(x) = Y(x) / \frac{qL^4}{EI}$						
Solução Analítica	Solução Numérica: MDF					
	Malha com 3 nós	Malha com 5 nós	Malha com 7 nós	Malha com 9 nós	Malha com 11 nós	Malha com 19 nós
$\psi(L/2)$ = 0.0130	0.0156 $\varepsilon_R = 20\%$	0.0137 $\varepsilon_R = 5,4\%$	0.0133 $\varepsilon_R = 2,3\%$	0.0132 $\varepsilon_R = 1,5\%$	0.0131 $\varepsilon_R = 0,8\%$	0.0130 $\varepsilon_R = 0\%$

Figura 3 - Convergência do Método das Diferenças Finitas no cálculo das flechas para viga biapoada.



5.1.2 Viga Engastada-Livre

Figura 4 - Viga engastada-livre e discretizada com 5 nós em diferenças finitas (comportamento estático).



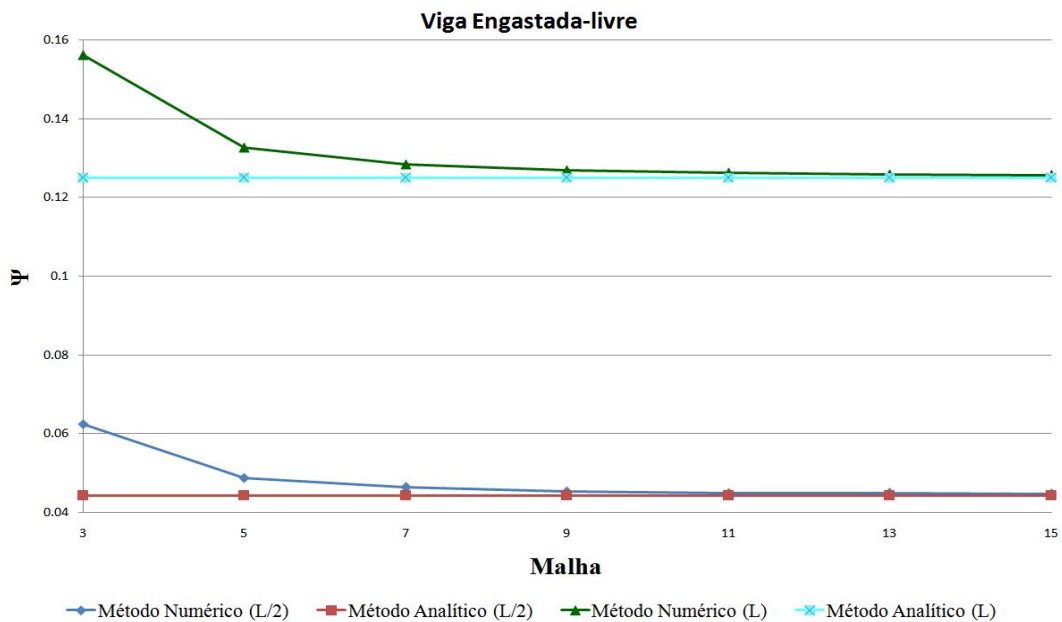
- % Deseja-se calcular a flecha no meio do vão ($i=2$) e na extremidade livre ($i=4$). Analogamente ao caso anterior:

Tabela 4 - Convergência do método das diferenças finitas no cálculo das flechas para viga engastada-livre.

Flechas adimensionais: $\psi(x) = \frac{Y(x)}{\frac{qL^4}{EI}}$							
Solução Analítica	Solução Numérica: MDF						
	Malha com 3 nós	Malha com 5 nós	Malha com 7 nós	Malha com 9 nós	Malha com 11 nós	Malha com 13 nós	Malha com 15 nós
$\psi(L/2)$ = 0.0443	0.0625 $\varepsilon_R = 41\%$	0.0488 $\varepsilon_R = 10\%$	0.0463 $\varepsilon_R = 4,5\%$	0.0454 $\varepsilon_R = 2,5\%$	0.0450 $\varepsilon_R = 1,6\%$	0.0448 $\varepsilon_R = 1,1\%$	0.0446 $\varepsilon_R = 0,7\%$
$\psi(L)$ = 0.1250	0.1563 $\varepsilon_R = 25\%$	0.1328 $\varepsilon_R = 6,2\%$	0.1285 $\varepsilon_R = 2,8\%$	0.1270 $\varepsilon_R = 1,6\%$	0.1263 $\varepsilon_R = 1,0\%$	0.1259 $\varepsilon_R = 0,7\%$	0.1256 $\varepsilon_R = 0,5\%$

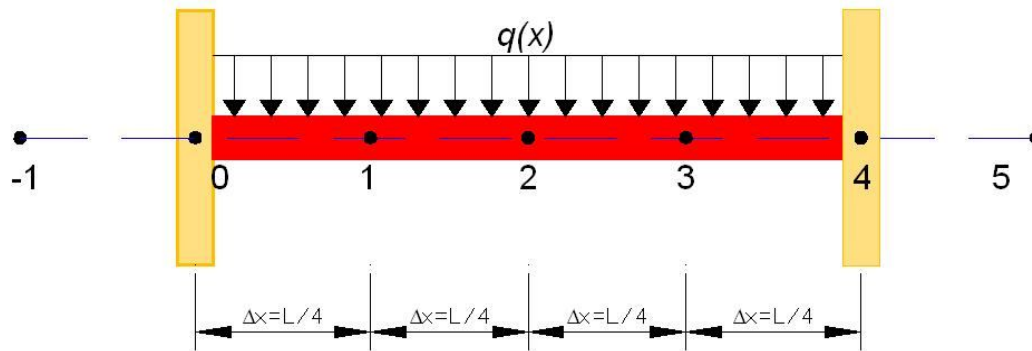
Para melhor visualizar a convergência do método numérico (MDF) para o valor analítico, ilustram-se os resultados na Figura 5.

Figura 5 - Convergência do Método das Diferenças Finitas no cálculo das flechas para viga engastada-livre.



5.1.3 Viga Biengastada

Figura 6 - Viga biengastada e discretizada com 5 nós em diferenças finitas (comportamento estático).



- % Deseja-se calcular a flecha no meio do vão ($i=2$). Analogamente aos casos anteriores:

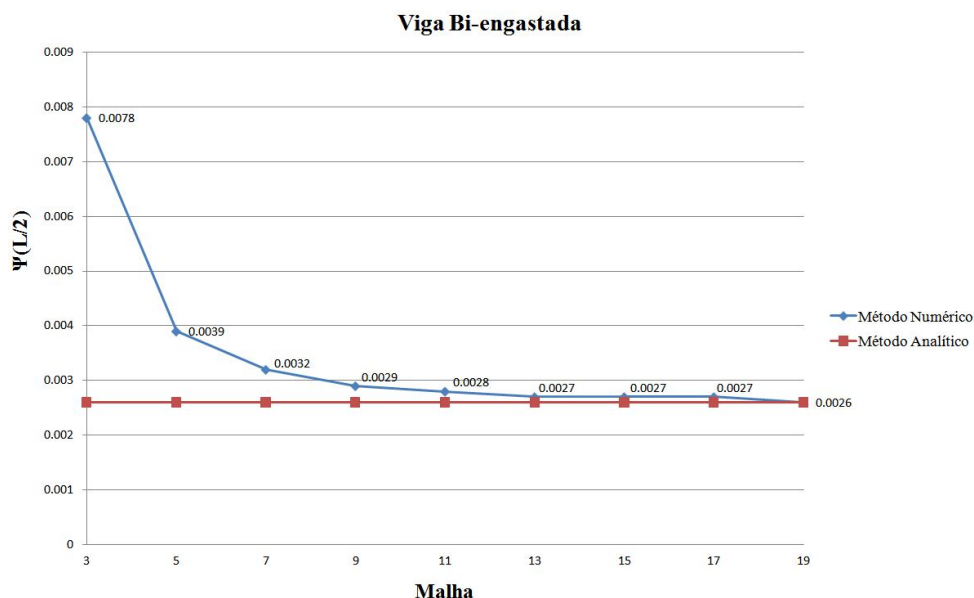
Tabela 5 - Convergência do método das diferenças finitas no cálculo das flechas para viga biengastada.

$$\text{Flechas adimensionais: } \psi(x) = \frac{Y(x)}{\frac{qL^4}{EI}}$$

Solução Analítica	Solução Numérica: MDF						
	Malha com 3 nós	Malha com 5 nós	Malha com 7 nós	Malha com 9 nós	Malha com 11 nós	Malha com 13, 15 e 17 nós	Malha com 19 nós
$\psi(L/2)$ = 0.0026	0.0078 $\varepsilon_R = 200\%$	0.0039 $\varepsilon_R = 50\%$	0.0032 $\varepsilon_R = 23\%$	0.0029 $\varepsilon_R = 12\%$	0.0028 $\varepsilon_R = 8\%$	0.0027 $\varepsilon_R = 4,8\%$	0.0026 $\varepsilon_R = 0\%$

Para melhor visualizar a convergência do método numérico (MDF) para o valor analítico, ilustram-se os resultados na Figura 7.

Figura 7 - Convergência do Método das Diferenças Finitas no cálculo das flechas para viga biengastada.



6 CONCLUSÕES

A partir dos resultados obtidos neste estudo, alguns comentários e conclusões podem ser evidenciados:

- 1) O método das diferenças finitas aplicado à equação diferencial governante de vigas, no estudo do comportamento estático, leva a sistemas de equações que permitem a determinação das flechas em qualquer ponto desta viga (Silva & Pedroso, 2005);
- 2) A equação diferencial governante para vigas de Euler, quando tratada pela técnica de diferenças finitas, no estudo do comportamento estático, é do tipo: , onde A representa a matriz de coeficientes à flexão;
- 3) A Tabela 3 e a Figura 3 mostram que, com o aumento do número de nós na viga biapoiada, se tem uma melhor aproximação do valor da flecha numérica em comparação ao valor analítico. Entretanto, notou-se que somente a partir da malha com 19 nós os valores convergiram, com a precisão de 4 casas decimais, para que o erro percentual seja nulo;
- 4) No estudo de caso de uma viga engastada-livre a Tabela 4 e a Figura 5 mostram que para a malha com 3 nós, o valor da flecha no meio do vão converge mais rápido para o valor analítico em relação ao valor que converge a flecha da extremidade livre, entretanto para a malha com 15 nós esta diferença é quase que irrelevante;
- 5) No estudo de caso de uma viga hiprestática a Tabela 5 e a Figura 7 mostram que o valor da flecha no meio do vão, para a malha com 3 nós possui um erro relativamente alto, contudo a medida que a malha é mais discretizada (refinada) este erro diminui quase que pela metade a cada refinamento de malha. Percebe-se também, que as malhas com 13, 15 e 17 nós apresentam o mesmo valor (com 4 casas decimais) para a flecha adimensional no meio do vão.

REFERÊNCIAS

SILVA, S. F.; PEDROSO, L. J. **Método das diferenças finitas em dinâmica de vigas profundas**. Relatório Técnico de Pesquisa, RTP-SFS03, UnB-FT/ENC, Brasília, 2005.

SILVA, S. F. O método das diferenças finitas aplicado à viga de Euler: comportamento estático e dinâmico. **Revista Traços**, Belém, v.10, n.21, p. 9-22, jun. 2008.

SOUSA Jr., L. C. **Uma aplicação dos métodos dos elementos finitos e diferenças finitas à interação fluido-estrutura**. 217f. Dissertação (Mestrado em Estrutura e Construção Civil) – Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, Brasília, 2006.

NASH, W. A. **Resistência dos Materiais**. Ed. MacGraw-Hill do Brasil, Ltda. São Paulo, 1982.

SZILARD, R. **Theory and analysis of plates: classical and numerical methods**. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1974.