5º Postulado de Euclides e as Geometrias Não - Euclidianas

Pedro Sá. Professor do Departamento de Matemática e Estatística

RESUMO: O presente artigo traça uma linha evolutiva da geometria e destacando o papel do 5º Postulado de Euclides para o surgimento das Geometrias não-euclidianas e apresenta um quadro comparando alguns resultados das geometrias hiperbólicas, parabólicas e elíptica.

A geometria tem suas raízes nas remotas eras dos primeiros homens. Através do processo de conquista do meio ambiente para sobrevivência, o homem foi tendo contato com variadas formas de objetos e este contato proporcionou a abstração(idealização) de formas perfeitas como círculo, quadrado, esferas entre outras.

Devido a necessidade das civilizações de se planejarem e se organizarem, o homem desenvolveu técnicas para determinação de volumes, áreas e comprimentos. No livro de Ahmes, um manual para secretários do Egito antigo, são apresentadas técnicas de cálculo de volumes e áreas.

A engenharia também contribuiu para o desenvolvimento de idéias geométricas. É sabido que os egípcios e babilônios já conheciam com grande precisão a relação entre o comprimento da circunferência e seu diâmetro e usavam o que chamamos de Teorema de Pitágoras nas suas construções.

Herodoto, o pai da história, diz que a geometria surgiu no Egito como conseqüência de medir as terras, anualmente, após as enchentes do Rio Nilo.

Podemos então acreditar que a geometria teve sua origem e desenvolvimento nas diversas atividades humanas.

Entretanto, em dado momento, a geometria passou também a ser objeto de estudo dos filósofos gregos como Tales de Mileto, Demócrito entre outros, como conseqüência disto, os resultados e observações oriundos da prática foram transformados gradati-vamente em deduções lógicas.

A Tales é dado o título de 1º Verdadeiro Matemático, por ter feito as primeiras demonstrações de teoremas que entre outros são:

- Um ângulo inscrito em um semicírculo é reto;
- Ângulos opostos pelo vértice são congruentes;
- Um círculo é bissectado por um diâmetro;
- Os ângulos da base de um triângulo isósceles são iguais.

Com a criação da biblioteca de Alexandria seu bibliotecário, Euclides, publicou, por volta de 400 a.C., um livro intitulado Os Elementos, que reunia toda matemática em 465 proposições envolvendo toda geometria plana, geometria espacial, e álgebra geométrica grega de sua época, com uma novidade marcante que é a apresentação axiomática da geometria.

Para apresentar a geometria de forma axiomática, Euclides baseou-se em cinco axiomas, verdades evidentes por si mesmas e comum a todos os campos de estudos, e postulados, verdades evidentes por si mesmas de um campo particular de estudo. Atualmente em matemática, postulados e axiomas são sinônimos.

Os axiomas e postulados apresentados por Euclides são:

- Axioma 1: Coisas iguais a uma mesma coisa são iguais entre si.
- Axioma 2: Adicionando iguais a iguais, obtém-se resultados iguais.
- Axioma 3: Subtraindo iguais de iguais obtém-se resultados iguais.
- Axioma 4: Coisas que coincidem uma com a outra são iguais.
- Axioma 5: O todo é maior que as partes.
- Postulado 1: De qualquer ponto pode-se conduzir uma reta a qualquer ponto dado.
- Postulado 2: Toda reta limitada pode ser prolongada indefinidamente em linha reta.
- Postulado 3: Com qualquer centro e qualquer raio pode-se descrever um círculo.
- Postulado 4: Todos os ângulos retos são iguais.
- Postulado 5: Se uma reta cortando duas outras, forma ângulos interiores de um mesmo lado menores que dois ângulos retos, então as duas retas, se prolongadas indefinidamente, encontrar-se-ão na parte em que os ângulos são menores que dois retos.

Ao contrário das teorias axiomáticas atuais, Euclides não usou entes primitivos, definindo ponto como " aquilo que não tem partes", reta como "um comprimento sem largura" e plano sem "aquilo que só tem comprimento e largura". As definições Euclidianas de ponto, reta e plano são vagas, para o rigor de hoje, e levam círculos viciosos.

Entretanto, para os gregos a geometria não era um estudo abstrato, e sim um estudo sistematizado do espaço material idealizado. Desse modo, as definições de ponto e reta Euclidianas são originadas em idealizações de coisas como um grão minúsculo e um fio muito fino esticado.

Uma primeira apresentação dos postulados de Euclides já destaca a forma do 5º em relação aos demais.

Seu enunciado o diferencia dos outros, já que é bem mais complicado e extenso. Além de não parecer tão óbvio e evidente como os demais.

Alguns contemporâneos de Euclides achavam que o 5º postulado poderia ser uma conseqüência dos demais, ou seja poderia ser um teorema enquanto outros achavam que não havia necessidade do 5º postulado para a axiomatização da geometria.

Como a credibilidade de uma teoria axiomática, ou seja, dos teoremas, depende diretamente da credibilidade dos axiomas e postulados que os precedem, muitos matemáticos, desde a publicação dos Elementos, tentaram, por mais de 20 séculos, superar as dúvidas que pairavam sobre o 5º postulado. Tentando construir uma demonstração a partir dos postulados anteriores ou substituindo-o por outro. Na tentativa de substitui-lo por um postulado mais evidente sem enfraquecer o sistema, surgiram alguns, entre eles os seguintes:

1 - Por um ponto fora de uma reta pode-se passar uma única paralela à reta dada.

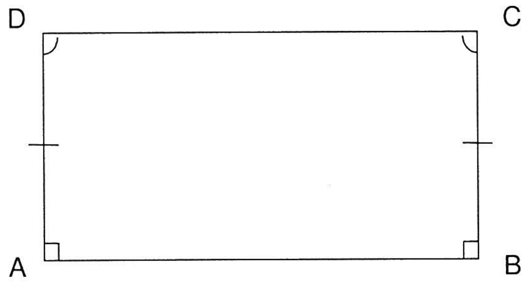
2 - A soma dos ângulos internos de um triângulo qualquer é sempre igual a dois ângulos retos.

3 - Três pontos não colineares determinam um círculo.

O primeiro enunciado acima assumiu o lugar do 5º postulado desde o século XVIII e por este motivo, até hoje o 5º postulado é chamado de Postulado das Paralelas. Contudo a dúvida sobre a validade do 5º postulado durou até o século XIX.

Na procura de uma demonstração da validade do referido postulado, o jesuíta italiano Girolano Saccheri apresentou um trabalho que pretendia demonstrar através da redução ao absurdo a validade do 5º postulado. O plano da demonstração foi o seguinte: Admitiu como verdadeiros os quatro primeiros postulados, negou o 5º e assim esperava construir uma contradição.

Como as 28 proposições iniciais dos Elementos não necessitavam do postulado negado. Saccheri empreendeu o estudo do quadrilátero ABCD, da figura abaixo,



onde os ângulos A e B são retos e AD e BC iguais. Traçando as diagonais AC e BD e usando teoremas de congruência, mostrou facilmente que os ângulos D e C são iguais. Havendo três possibilidades a saber:

1 - D e C sendo agudos ;

2 - D e C sendo retos ;

3 - D e C sendo obtusos.

Saccheri referiu-se as possibilidades acima como Hipótese do ângulo agudo, Hipótese do ângulo reto e Hipótese do ângulo obtuso. E como Saccheri assumia o postulado da infinidade da reta, a Hipótese do ângulo obtuso foi prontamente excluída. Entretanto, o caso da Hipótese do ângulo agudo mostrou-se mais difícil. Neste ponto, Saccheri forçou uma contradição no desenvolvimento de suas idéias através de noções nebulosas sobre elementos infinitos. Fracassando assim o seu intento.

Hoje sabemos que Saccheri não poderia chegar as contradições desejadas e que na realidade demonstrou, sem saber, teoremas clássicos da chamada geometria não-euclidiana. Talvez sua vontade de achar uma contradição não tenha permitido afirmar sua incapacidade de alcançá-lo e por isso seu trabalho foi logo esquecido.

Acredita-se, hoje, que foi Gauss quem primeiro descobriu a possibilidade da construção de outras geometrias além da Euclidiana. Porém, nunca publicou os resultados dessa descoberta, talvez por receio das repercussões em torno de seu famoso nome.

Já o húngaro Bolyai e o russo Lobachevsky publicaram, independentemente, seus trabalhos sobre uma nova geometria, onde não valia o 5º postulado e não havia contradição.

No ano 1832, a Ciência Absoluta do Espaço de Bolyai apareceu como um apêndice de 26 páginas num trabalho de seu pai.

Lobachevsky publicou sua Pangeometria, na Rússia, em 1829 e 1830, porém essas publicações só tornaram-se conhecidas a partir de 1855, quando publicada em Francês. A questão da independência do 5º postulado só foi estabelecida, inquestionavelmente, quando foram fornecidas demonstrações de consistência da Hipótese do ângulo agudo, nos trabalhos de Beltrami, Caeley, Felix Klein e Poincaré entre outros.

Em 1854, Riemann, ex-aluno de Gauss, mostrou que descartando a infinitude da reta, admitindo-a somente limitada e fazendo pequenos ajustes nos demais postulados e admitindo a Hipótese do ângulo agudo, poderia construir uma geometria não-euclidiana consistente.

As geometrias de Bolyai e Lobachevsky, de Euclides e de Riemann foram chamadas por Kliein, em 1871, de Geometria Hiperbólica, parabólica e elíptica respectivamente. Hoje, sabemos que qualquer modelo geométrico criado será equivalente a um dos três mencionados acima.

É importante ressaltar que até o surgimento das geometrias não-euclidianas acreditava-se que o espaço era uma estrutura já existente no espírito humano, que os postulados euclidianos eram juízos a priori impostos ao ser humano, e que sem tais postulados era impossível qualquer raciocínio consistente sobre o espaço.

Um grande efeito das Geometrias não-euclidianas foi o despertar da matemática no seu todo como uma criação arbitrária da mente humana e não como algo necessariamente ditado a nós pelo mundo em que vivemos. Cantor afirmou: "a essência da matemática está na sua liberdade".

Apesar da liberdade que as geometrias não-euclidianas trouxeram à matemática, sua aplicabilidade parecia impossível. Até que a geometria de Riemann foi utilizada como modelo para relatividade de Einstein, mostrando assim, definitivamente, que o espaço não é, absolutamente, euclidiano.

Apresentamos agora para finalizar, um quadro comparativo entre as geometrias.

	Geometria Parabólica	**Geometria Hiperbólica**	**Geometria Elíptica**	
Dois Pontos determinam	uma	uma	uma ou mais	reta
Toda reta é	Infinita	Infinita	Finita	_
Um ponto e uma distância determinam	um	um	um	Círculo
Todos os ângulos retos são	iguais	iguais	iguais	-
Um ponto fora de uma reta determina	somente uma	mais de uma	nenhuma	Paralela a reta dada
A hipótese de Saccheri válida é	ângulo reto	ângulo agudo	ângulo obtuso	-
Duas retas distintas e perpendiculares a uma mesma reta	são paralelas	são paralelas	interceptam	-
Linhas Paralelas	são eqüidistantes	nunca são eqüidistantes	não existem	
Uma Linha	é separada em duas partes por um ponto	é separada em duas partes por um ponto	não é separada em duas partes por um ponto	-
Dois Triângulos que tem ângulos correspondentes iguais são	semelhantes	congruentes	congruentes	-
A razão entre o comprimento e o diâmetro de uma circunferência	igual a π	maior que π e aumenta com a área da circunferência	menor que π e diminui com a área da circunferência	-
As somas dos ângulos internos de um triângulo é	igual a	menor que	maior que	180 graus

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

EVES, Howard - *Introdução à História da Matemática* - Ed. da UNICAMP - Campinas - SP - 1995.

_______________________. *Estudio de Las Geométrias* - Centro Regional de Ayuda Técnica - México - 1963.

FETISSOV - A, I - *A demonstração em Geometria* - Ed. Atual, Ed. Mir - SP. 1994.

TENÓRIO, Robson M. - *Aprendendo pelas Raízes* - Centro Editorial e Didático da UFPA - Salvador - 1995.