AS SURPRESAS DO INFINITO

***Pedro Franco de Sá**

RESUMO: Este artigo faz um breve apanhado histórico dos conjuntos infinitos, e mostra alguns resultados, a primeira vista inverídicos, sobre os conjuntos enumeráveis e dá exemplos de conjuntos não - enumeráveis.

Na Grécia Antiga um dos seus axiomas dizia que *"o todo é sempre maior que as partes"*, isto era aceito para todas as espécies de todo finito ou infinito.

A primeira pessoa a chamar a atenção para o problema desse axioma nos conjuntos infinitos foi ***Galileu Galilei*** no seu trabalho "***Diálogo Referente às Novas Ciências***" de 1636. Neste trabalho Galileu mostra que o número quadrado é igual ao de números. E diz que a idéia de menor, maior do que ou igual a usada no campo finito.

Em 1820, quase 200 anos depois dos "***Diálogos de Galilei***", surge um tratado do alemão ***Bolzano*** intitulado "*Os Paradoxos do Infinito*", que também ficou esquecido. Entretanto temos que creditar a **Bolzano** a criação do conceito **Potência** de um conjunto, que é o seguinte:

☆**Definição-1**: Dois conjuntos A e B têm a mesma potência se existe uma bijeção de A em B.

É fácil mostrar que a equipotência é uma relação de equivalência.

Em 1878, 58 anos após "*Os Paradoxos*" de **Bolzano, George Cantor** estudou sistematicamente o conceito de potência de um conjunto, chegando a resultados surpreendentes.

No tempo de Cantor, o infinito era apenas um símbolo para expressar que há limites de certas razões que são tão próximas quantas as outras e que outras podem crescer além de qualquer limite. Essa posição era defendida veemente por **Gauss**, o que foi um grande obstáculo para as idéias de Cantor.

Cantor, continuando de onde Galileu parou, mostrou que é possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre dois conjuntos infinitos, mesmo que um esteja contido no outro.

Um exemplo simples é dado no caso dos naturais e dos naturais pares. Os naturais pares estão contidos nos naturais e a função:

$$f: N \rightarrow \text{Pares}$$
$$f(n) = 2n$$

é uma bijeção, mostrando que a "quantidade" de naturais é mesma de pares.

É fácil mostrar que há também a mesma quantidade de naturais e ímpares, basta tomar $f(n) = 2n - 1$.

Como antes de Cantor o infinito era apenas mais um símbolo, foi preciso uma definição para infinito.

☞ Vejamos duas definições que auxiliaram a construção da definição de infinito.

☆ **Definição -2:**
Chamamos de I_n o conjunto de naturais dado por $I_n = \{1, 2, 3, \ldots n\}$.

☆ **Definição-3 :**
Um conjunto A é finito se é vazio ou equipotente a um I_n.

☆ **Definição-4:**
Um conjunto A é infinito se não é finito.

☞ Vejamos agora alguns exemplos de conjuntos **equipotentes.**

*Especialista em Ensino de Matemática, Especialista em Matemática, Mestrando em Matemática, tendo como área de concentração Geometria Diferencial e dedica-se a pesquisa em Metodologia da Matemática desde seu Curso de Graduação.

① - O conjunto dos **inteiros é equipotente**

De fato, $f: N \to Z$

$$f(n) = \begin{cases} \dfrac{n-1}{2}, & n \text{ é ímpar} \\ -\dfrac{n}{2}, & n \text{ é par} \end{cases}$$

demonstra a equipotência entre N e Z.

② - O conjunto dos **racionais** é **quipotente** aos **naturais.**

De fato, tomando

$f: Q \to N$

$$f: \left(\frac{m}{n}\right) = \frac{1}{2}(m+n-2)(m+n-1)+m$$

fica demonstrada a equipoência entre Q e N.

③[0,1] é equipotente a] 0,1[

✓De fato, fazendo A= [0,1] - {0,1,1/2,1/3, ...}
=] 0,1[- {1/2, 1/3,1/4....}

✍ Podemos afirmar que:

[0,1] = { 0,1, 1/2, 1/3 ...} ∪ A e
] 0,1[= { 1/2,1/3, 1/4 ...} ∪ A

✓Agora consideramos a função:

f: [0,1] →]0,1[definida pelo diagrama abaixo:

{ 0,1, 1/2,1/3, ...} ∪ A

↓ ↓ ↓ ↓ ↓ 1_A

{1/2,1/3,1/4,1/5...} ∪ A

✓ou seja:

f: [0,1]→]0,1[é dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} & ; \text{ se } x = 0 \\ \dfrac{1}{n+2} & ; \text{ se } x = \dfrac{1}{n}, n \in N \\ x & ; \text{ se } x \neq 0, x \neq \dfrac{1}{n} \end{cases}$$

✓ como f é bijetora, então [0,1] é equipotente a]0,1[

④ [0,1] é equipotente a [0,1[

✓De fato, fazendo A= [0,1]- { 0,1,1/2, 1/3, ...}
= [0,1[-{ 0,1/2, 1/3, 1/4..}

Podemos afirmar que:

[0,1] = { 0,1, 1/2, 1/3....}∪A e
[0,1[= {0, 1/2, 1/3, 1/4 ...} ∪ A

✓Agora consideramos a função:

f: [0,1] → ([0,1[definida pelo diagrama abaixo:

{ 0, 1, 1/2, 1/3, ...} ∪ A

↓ ↓ ↓ ↓ ↓ 1_A

{0, ½, 1/3,1/4,......} ∪ A

ou melhor:

f: [0,1] → [0,1[é dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{n+1} & ; \text{ se } x = \dfrac{1}{n}, n \in N \\ x & ; \text{ se } x \neq \dfrac{1}{n}, n \in N \end{cases}$$

✓como f é bijetora, então [0,1[é equipotente = a[0,1[

⑤ [0,1] é equipotente [0,1]

✓De fato, a função:

f = [0,1]→]0,1] dada por:

f(x) = 1 - **x é bijetora**, logo [0,1] é **equipotente** a]0,1]

✓Dos exemplos ③,④ **e** ⑤e pela transitividade da relação de equipotência podemos concluir que: [0,1] ,]0,1] ,]0,1] e [0,1[, são **equipotentes.**

Aos conjuntos equipotentes aos naturais foi dado o nome de enumeráveis.

☞ Vejamos alguns resultados sobre os conjuntosenumeráveis:

📖 - Proposição 1 :

Todo subconjunto infinito de um conjunto enumerável é enumerável.

ÄDemonstração :

Seja B um subconjunto infinito do conjunto enumerável A = { a_1, a_2, ... a_n,.. } e seja :

n_1 o menor índice tal que $a n_1 \in$ **B**;
n_2 o menor índice tal que $a n_2 \in$ **B**; $\{an_1\}$;
n_2 o menor índice tal que $a n_2 \in$ **B**; $\{an_1, an_2\}$;
n_k o menor índice tal que $a_{nk} \in B-\{a_1, an_2, an_{k-1}\}; n_{k-1}\}$;

✓Como B é infinito, a diferença :

$B - \{a_{n1}, a_{n2}, a_{nk-1}\} \neq \varnothing$, $\forall$ **k** $\in$ **N**, e

$\forall n_{k_1}$, existe para todo **k** $\in$ **N**

A função f: N $\rightarrow$ B, dada por:

$f(k) = a_{n_k}$, $\forall$ K $\in$ N é **bijetora**.

✓ Portanto B **é enumerável .**

uma consequência imediata é que o conjunto de **primos é enumerável.**

📖 - Proposição 2 :

Todo o conjunto infinito tem um subconjunto enumerável.

↬Demonstração:

Seja A um conjunto infinito. Escolhamos em A o elemento a_1 e seja $a_2 \in A-\{a\}$.Escolhamos no conjunto $A - \{a_1, a_2\}$ o elemento a_3 e seja $a_4 \in A - \{a_1, a_2, a_3\}$, e assim por diante. Definindo deste modo, o elemento $a_{k-1} \in A$, seja a_k um elemento de $A - \{a_1, a_2, \ldots a_{k-1}\}$. Este elemento a_k existe para todo $k \in N$, pois, como A é infinito, a diferença

$A - \{a_1, a_2, \ldots a_{k-1}\} \neq \varnothing$, $\forall$ $k \in N$. Portanto o conjunto $\{a_k : k \in N\}$, assim construído é um subconjunto enumerável de A.

📖 - Proposição③:

A união de um conjunto finito com um enumerável é enumerável.

↬ Demonstração:

Sejam os conjuntos A e B, sendo A finito com k elementos e B enumerável :

$A = \{a_1, a_2, \ldots a_k\}$ e $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_k, \ldots\}$

A função f: **N $\rightarrow$ A $\cup$ B, dada por:**

$$f(n) = \begin{cases} a_n \ ; & \text{se } 1 \leq n \leq k \\ b_{n-k} \ ; & \text{se } n \geq k+1 \end{cases}$$

é bijetora

☞ Logo A $\cup$ B é **enumerável.**

📖 - Proposição ④:

A união de dois conjuntos **enumeráveis** é **enumerável.**

↬Demonstração:

Sejam os conjuntos enumeráveis $A = \{a_1, a_2, \ldots a_n, \ldots\}$ e $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots\}$

A função f: N $\rightarrow$ A $\cup$ B, dada por:

$$f(n) = \begin{cases} a_k \ ; & \text{se } n = 2k, \ \forall\ k \in N \\ b_k \ ; & \text{se } n = 2k - 1 \ \ k \in N \end{cases}$$

é bijetora

☞ logo A $\cup$ B é enumerável.

📖 - Proposição ⑤ :

O conjunto N x N é **enumerável**

↬Demonstração:

A função f: N x N$\rightarrow$N, definida por:

$f(m, n) = 2^m \cdot 3^n$, $\forall$ $(m, n) \in$ N X N é injetora. Como o domínio de toda a função bijetora é equipotente a sua imagem, temos:

N x N é equipotente f: (N x N) $\subset$ N

Como N x N é infinito, segue que f(N X N) é um subconjunto infinito de um conjunto enumerável, pela Proposição①

f(N X N) é enumerável o que implica N X N enumerável.

🕮- Proposição⑥:

Se A e B são **enumeráveis** então AXB é **enumerável.**

Demonstração:
Sejam A e B enumeráveis então existe
$f : N \to A$ **bijetora**
$g : N \to B$ **bijetora**

A função h: $N \times N \to A \times B$ dada por:

$h(m,n) = (f(m), g(n)), \quad \forall (m,n) \in N \times N$, é **bijetora**, então,

A X B e N X N são equipotentes

☞ Logo, A X B é **enumerável**

Mas, pela proposição ⑤ N X N é **enumerável.**

✓ Como já vimos N, Z e Q, são equipotentes, será que N é equipotente a IR ?

Está indagação tem resposta negativa, através do seguinte teorema de **Cantor.**

TEOREMA ①: Teorema de Cantor

O intervalo [0,1], não é enumerável.

Antes de apresentar a demonstração do Teorema, veremos mais dois resultados sobre intervalos.

🕮 - Proposição⑦:

1) [0,1] é equipotente a [a,b]
2) [0,1[é equipotente a [a,b[
3)]0,1] é equipotente a]a,b]
4)]0,1[é equipotente a]a,b[, $\forall$ a < b

Demonstração:

Como as funções:

$f_1 : [0,1] \to [a,b]$
$f_1(x) = a + (b - a)x$;

$f_2 : [0,1[\to [a,b[$
$f_2(x) = a + (b - a)x$;

$f_3 :]0,1] \to]a,b]$
$f_3(x) = a + (b - a)x$ e;

$f_4 :]0,1[\to]a,b[$
$f_4(x) = a + (b - a)x$;

são **bijetoras**, fica demonstrada a proposição.

✓ Como nos exemplos ③, ④ e ⑤, já vimos que:

⇨[0,1],]0,1],]0,1[e [0,1[são **equipotentes**, então pela proposição ⑦ podemos afirmar que todos os intervalos são **equipotentes**.

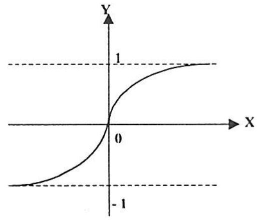
🕮 -Proposição⑧:

IR é **equipotente**] -1,1[

Demonstração:

✓ Para demonstrar a afirmação basta tornar:

$f : \mathbb{R} \to]-1,1[$
f(X) = arctg X. que é **bijetora**
A figura dá uma imagem de **bijeção**



Pela transitividade da relação de equipotência, e das proposições ⑦ e ⑧ podemos afirmar que:

⇨IR é equipotente a qualquer intervalo.

☞Voltemos agora ao Teorema de Cantor.

Teorema ❶: Teorema de Cantor.

O intervalo [0,1] não é enumeravel.

↳ Demonstração:

✓Suponhamos que [0,1], seja enumerável. Então, os elementos de A = [0,1], podem ser escritos numa sequência ou seja,

$A = \{ x_1, x_2, x_3 \ldots \}$.

✓ Agora seja a seguinte seqüência de intervalos fechados de A:

$[0, 1/3], [1/3, 2/3], [2/3, 1]$ (1)

⇨cada um com amplitude 1/3. É evidente que x, não pode pertencer a todos os três intervalos.

✓Seja: $I_1 = [a_1, b_1]$, um dos intervalos de (1) tal que $x_1 \notin I_1$.

☞Consideremos, agora, os três seguintes intervalos de $I_1 = [a_1, b_1]$,

$[a_1, a_1 + 1/9], [a_1 + \frac{1}{9}, a_1 + 2/9], [a_1 + 2/9, b_1]$ (2)

⇨Cada um com amplitude 1/9. analogamente, seja I_2, um dos intervalos em

(2) que $x_2 \notin I_2$.

☞ Continuando desta maneira, obten-se uma seqüência de intervalos fechados

$I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \ldots\ldots\ldots$

✓ Tais que:

$x_n \notin I_n$, para todo $n \in N$

De acordo com o teorema dos intervalos encaixados, existe um real $\gamma \in A = [0,1]$, tal que g pertence a todo intervalo em (3). Mas o $\gamma \in A = \{x_1, x_2, x_3 \ldots\} \Rightarrow \gamma = x_m$, para algum $m \in N$. Então, pela nossa construção, $\gamma = x_m \notin I_m$, o que contradiz o fato de que $\overset{0}{g}$, pertence a todo intervalo em (3). Assim, a nossa hipótese de que A é **enumerável** conduz a uma contradição.

☞ logo, A= [0,1] não é **enumerável**.

É importante destacar que este resultado mostrou a existência dos números irracionais que eram combatidos por alguns matemáticos da época de Cantor como **Kronocker** que dizia: ***"Deus criou os inteiros o resto é criação dos homens"***

.

O Teorema acima mostrou que N não é equipotente a **IR** e que o infinito dos reais é maior que o infinito dos naturais.

Cantor chamou de c_0 a potência de N e c_1 a potência de **IR** , esses números foram chamados de transfinitos .

Uma pergunta que surgiu naturalmente foi a seguinte:

Existe um **transfinito** entre c_0 e c_1? Até a presente data tem uma resposta negativa. Entretanto sabemos que existem outros números **transfinitos** **"maiores"** que c_1 . Por exemplo é o chamado **múltiplo funcional**, ou seja, a totalidade de funções que podem ser estabelecidas entre dois conjuntos.

Hoje, o fato de não existir um **transfinito** entre χ_0 e χ_1 é chamado de **hipótese do contínuo.**

Cantor e seus colaboradores construíram uma aritmética dos transfinitos que entre outras propriedades tem as seguintes:

① - $\chi_0 + \chi_0 = \chi_0$

② - $n + \chi_0 = \chi_0$, $n \in N$

③ - $\chi_0 \times \chi_0 = \chi_0$

④ - $\chi_1 \times \chi_1 = \chi_1$

⑤ - $\chi_0 + \chi_1 = \chi_1$

⑥ - "$0^0 = 1$"

Infelizmente Cantor morreu num sanatório. Nunca conseguiu ser professor na Universidade de Berlim, devido a perseguição de **Kronecker.**

Entretanto, teve seu trabalho reconhecido na famosa frase do não menos famoso, matemático **David Hilbert**: "Ninguém nos expulsará do paraíso que Cantor criou para nós".

Para concluir é importante lembrar que, graças a coragem de Cantor, hoje temos a certeza que a afirmação ***"o todo é sempre maior que as partes"*** , fica válido somente para os conjuntos finitos como afirmou **Galileu Galilei.**

BIBLIOGRAFIA CONSULTADA

BIRKHOOF, S. **Álgebra Moderna Básica**. Rio de Janeiro: Guanabara dois, 1985.

BOYER, C. **História da Matemática**. São Paulo: Edgar Brucher, 1992.

DANTIZIG, Tobias. **Número a linguagem da ciência**. Rio de Janeiro: Zahar, 1980

EVES, Howards. **Introdução a História da Matemática**. São Paulo: UNICAMP, 1997.