

MÉTODOS NUMÉRICOS: TÉCNICA DOS RESÍDUOS PONDERADOS

SELÊNIO FEIO DA SILVA *

RESUMO: O presente trabalho introduz um método alternativo para a resolução de equações diferenciais, desenvolvendo uma formulação analítica consistente, validando a *Técnica dos Resíduos Ponderados*. Um breve comentário é feito sobre a Solução Analítica, a Solução Experimental e a Solução Numérica, na Eng^a Civil. Por fim uma aplicação é feita com o objetivo de comparar a solução analítica (exata) com as soluções numéricas (aproximadas) desenvolvidas.

1- INTRODUÇÃO

Diversos fenômenos físicos, nas mais diversas áreas como: Eng^a Civil, Eng^a Elétrica, Eng^a Mecânica, Biologia, Medicina, Geofísica, etc., podem ser representados por modelos matemáticos a fim de sua análise. Geralmente, os modelos matemáticos que melhor representam estes fenômenos, quando tratados sem simplificações, levam a uma equação diferencial que combina variáveis de tal forma que muitas vezes não permitem solução analítica para a equação, e vem a ser solucionado apenas mediante um tratamento numérico. As soluções numéricas constituem, portanto, em um *método alternativo* para a solução dessas equações.

Representa-se a seguir uma aplicação (matemática) onde calcula-se a área e o perímetro de um círculo utilizando as soluções: analítica (exata) e numérica (aproximada), a fim de comparar os resultados e perceber a idéia da solução numérica.

Seja o círculo da *Figura 1* de raio $r=10\text{ cm}$. Um polígono regular de n lados pode ser inscrito no círculo e a área deste polígono, bem como o perímetro, são dados pelas fórmulas

$$A = \frac{nr^2}{2} \operatorname{sen} \frac{360^\circ}{n} ; 2P = 2nr \operatorname{sen} \frac{180^\circ}{n},$$

respectivamente.

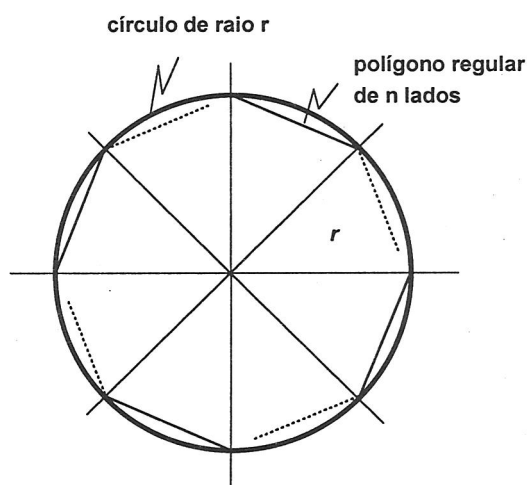


Figura 1: Polígono regular de n lados, inscrito em um círculo de raio r .

A medida que o número de lados do polígono inscrito aumenta, sua área e seu perímetro tendem a se aproximarem da área e do perímetro do círculo. Conclui-se, portanto, que a área e o perímetro de um polígono de n lados, com n tendendo ao infinito, representam uma forma aproximada para o cálculo da área e do perímetro do círculo.

* GRADUADO EM ENGENHARIA CIVIL - UFPA ; MESTRADO EM ESTRUTURAS - UnB; PROFESSOR ADJUNTO-I DOS CURSOS DE ENGENHARIA CIVIL E TECNOLOGIA EM PROCESSAMENTO DE DADOS - UNAMA

➤ Idéia :

$$A_{\text{circ.}} = A_{\text{pol.}}, \text{ quando } n \rightarrow \infty$$

$$2P_{\text{circ.}} = 2P_{\text{pol.}}, \text{ quando } n \rightarrow \infty$$

Fórmula Exata para o cálculo da área e do perímetro do círculo:

$$\begin{cases} A = \pi r^2 \\ 2P = 2\pi r \end{cases}$$

Fórmula Aproximada para o cálculo da área e do perímetro do círculo:

$$\begin{cases} A = nr^2 \operatorname{sen} \left(\frac{360^\circ}{n} \right) \\ 2P = 2nr \operatorname{sen} \left(\frac{180^\circ}{n} \right) \end{cases} ; \text{ quando } n \rightarrow \infty$$

A Tabela 1, abaixo, compara as duas fórmulas acima no cálculo da área e perímetro de um círculo de raio 10 cm. Para a fórmula aproximada faz-se n tender ao infinito.

Da Tabela 1, percebe-se que a solução aproximada (para $n = 300$, com duas casas decimais) coincide com a solução exata no que se refere ao perímetro do círculo; ao passo que a solução aproximada (para $n = 900$, com duas casas decimais) coincide com a solução exata no que se refere à área e perímetro do círculo. Portanto, esta solução aproximada representa um caminho alternativo para o cálculo desses parâmetros em função do número de lados do polígono

inscrito no círculo. Vale ainda perceber da Tabela 1, que a medida que o número de lados do polígono inscrito no círculo aumenta ($n \rightarrow \infty$), a solução aproximada converge para a solução exata.

Na Eng^a. Civil também existem caminhos alternativos para soluções dos problemas, a saber: Solução Analítica: utilizada em problemas de engenharia relativamente “simples” (problemas que não envolvem muitas variáveis e nem uma matemática muito complexa). Por exemplo, uma viga prismática biapoiada, de seção transversal reta e material isotrópico submetida apenas ao seu peso próprio, apresenta flecha

$$\text{no meio do vão } y(x) = \frac{5 q l^4}{384 E I}, \text{ onde:}$$

i)

$y_{(x)}$ → Flecha

q → Carga distribuída ao longo da viga (peso próprio)

l → Comprimento da viga

E → Módulo de elasticidade longitudinal

I → Momento de inércia

ii) *Solução Experimental*: consiste em se tratar o problema reproduzindo-o em um modelo reduzido e simulando as condições que irão existir de fato, ou mesmo reproduzindo em escala natural o experimento. Esta solução permite que se perceba realmente como a estrutura se comportará, porém, envolve custo e tempo, fatores muitas vezes determinantes para não se usar esta solução.

Tabela 1: Solução Exata e Aproximada no Cálculo da Área e Perímetro do Círculo

Parâmetros Estudados	Solução “Exata”	Solução Aproximada		
		n = 100	n = 300	n = 900
A (cm ²)	314,16	313,95	314,14	314,16
2P (cm)	62,83	62,82	62,83	62,83

- iii) *Solução Numérica*: está relacionada diretamente com os métodos computacionais, esta solução ganhou grande "espaço" na prática e no próprio meio acadêmico após o advento dos computadores. Sem dúvida esta solução apresenta inúmeras vantagens sobre as demais. Em relação a solução analítica, já não exige problemas relativamente simples com tantas particularidades; e em relação a solução experimental o tempo e o custo são consideravelmente reduzidos.

2- FORMULAÇÃO TEÓRICA

Seja a equação diferencial ordinária não homogênea de segunda ordem:

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + \lambda^2 u = b; \text{ em } x \in [0, 1]$$

$\tilde{u}$ = solução aproximada

$$\tilde{u} = u_1 \phi_1 + u_2 \phi_2 + \dots$$

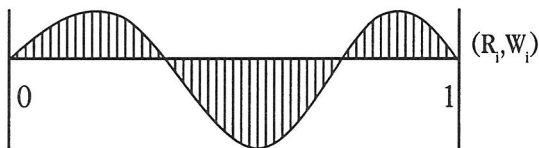
$\frac{d^2 \tilde{u}}{dx^2} + \lambda^2 \tilde{u} - b \neq 0 \Rightarrow$ erro devido a aproximação (resíduo).

Distribuição do Erro (R): A distribuição pode ser feita de forma discreta ou contínua.

Discreta: $\sum R_i W_i = 0$

Contínua: $\int R W dx = 0$; onde R = resíduo e

W = função peso (distribuição do erro)



Fazendo-se a distribuição do erro de forma contínua tem-se a equação dos resíduos ponderados:

$\int R W dx = 0$; equação dos resíduos ponderados

$$\int_0^1 \left(\frac{d^2 \tilde{u}}{dx^2} + \lambda^2 \tilde{u} - b \right) W dx = 0$$

$$\int_0^1 \underbrace{\frac{d^2 \tilde{u}}{dx^2} W dx}_{(a)} + \int_0^1 \underbrace{\lambda^2 \tilde{u} W dx}_{(b)} - \int_0^1 b W dx = 0$$

$$d(f.g) = f dg + gdf \Leftrightarrow gdf = d(fg) - fdg \rightarrow \int gdf = fg - \int fdg \text{ (integração por partes)}$$

Utilizando integração por partes no termo (a):

$$(a) \rightarrow \int_0^1 \frac{d^2 \tilde{u}}{dx^2} W dx = \underbrace{\frac{d\tilde{u}}{dx} W \Big|_0^1}_{(a_1)} - \int_0^1 \underbrace{\frac{d\tilde{u}}{dx} \frac{dW}{dx} dx}_{(a_2)}$$

Substituindo na equação (1):

$$\int_0^1 \left\{ \underbrace{\frac{d\tilde{u}}{dx} \frac{dW}{dx} dx}_{(a_2)} + \underbrace{(\lambda^2 \tilde{u} - b) W}_{(b)} \right\} dx + \underbrace{\frac{d\tilde{u}}{dx} W \Big|_0^1}_{(a_1)} = 0 \quad (2)$$

Utilizando integração por partes no termo (a₂):

$$(a_2) \rightarrow \int_0^1 \frac{d\tilde{u}}{dx} \frac{dW}{dx} dx = \underbrace{\tilde{u} \frac{dW}{dx} \Big|_0^1}_{(a_3)} - \int_0^1 \tilde{u} \frac{d^2 W}{dx^2} dx$$

Substituindo na equação (2):

$$\int_0^1 \left\{ \tilde{u} \frac{d^2 W}{dx^2} + (\lambda^2 \tilde{u} - b) W \right\} dx + \underbrace{\frac{d\tilde{u}}{dx} W \Big|_0^1}_{(a_1)} - \underbrace{\tilde{u} \frac{dW}{dx} \Big|_0^1}_{(a_3)} = 0 \quad (3)$$

→ Condições de Contorno ($\tilde{C}.C.$): Correspondem a valores pontuais previamente conhecidos, relaciona a função.

$$\tilde{C}.C. \begin{cases} u = \bar{u} & \text{(essencial ou Dirichlet)} \\ q = \frac{du}{dx} = \bar{q} & \text{(natural ou Neuman)} \end{cases}$$

Para o Problema em Estudo:

$$\tilde{C}.C. \begin{cases} u = \bar{u} \text{ em } x = 0 \\ q = \bar{q} \text{ em } x = 1 \end{cases}$$

Substituindo as condições de contorno na equação (3) e utilizando integração por partes:

$$\int_0^1 \left\{ \tilde{u} \frac{d^2 W}{dx^2} + (\lambda^2 \tilde{u} - b) W \right\} dx + \bar{q} W|_{x=1} - q W|_{x=0} - \left\{ \tilde{u} \frac{dW}{dx} \Big|_{x=1} - \bar{u} \frac{dW}{dx} \Big|_{x=0} \right\} = 0$$

$$\int_0^1 \tilde{u} \frac{d^2 W}{dx^2} dx = \tilde{u} \frac{dW}{dx} \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{d\tilde{u}}{dx} \frac{dW}{dx} dx$$

$$\int_0^1 \left\{ -\frac{d\tilde{u}}{dx} \frac{dW}{dx} + (\lambda^2 \tilde{u} - b) W \right\} dx + \cancel{\tilde{u} \frac{dW}{dx} \Big|_{x=1}} - \cancel{\tilde{u} \frac{dW}{dx} \Big|_{x=0}} + \bar{q} W|_{x=1} - q W|_{x=0} - \cancel{\tilde{u} \frac{dW}{dx} \Big|_{x=1}} + \bar{u} \frac{dW}{dx} \Big|_{x=0} = 0$$

$$\int_0^1 \left\{ -\frac{d\tilde{u}}{dx} \frac{dW}{dx} + (\lambda^2 \tilde{u} - b) W \right\} dx + \bar{q} W|_{x=1} - q W|_{x=0} + \bar{u} \frac{dW}{dx} \Big|_{x=0} - \tilde{u} \frac{dW}{dx} \Big|_{x=0} = 0$$

$$\int_0^1 \frac{d\tilde{u}}{dx} \frac{dW}{dx} dx = \frac{d\tilde{u}}{dx} W \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{d^2 \tilde{u}}{dx^2} W dx$$

$$\int_0^1 \left\{ \frac{d^2 \tilde{u}}{dx^2} W + (\lambda^2 \tilde{u} - b) W \right\} dx - \frac{d\tilde{u}}{dx} W \Big|_{x=1} + \frac{d\tilde{u}}{dx} W \Big|_{x=0} - \tilde{u} \frac{dW}{dx} \Big|_{x=0} + \bar{q} W|_{x=1} - q W|_{x=0} + \bar{u} \frac{dW}{dx} \Big|_{x=0} = 0$$

$$\int_0^1 \left\{ \frac{d^2 \tilde{u}}{dx^2} + (\lambda^2 \tilde{u} - b) \right\} W dx - \underbrace{[(q - \bar{q}) W]}_{R_1} \Big|_{x=1} + \underbrace{[(\bar{u} - \tilde{u}) \frac{dW}{dx}]}_{R_2} \Big|_{x=0} = 0$$

$$\equiv \int RW dx = 0$$

$$\tilde{u} = \sum_{j=1}^n \alpha_j \phi_j$$

$$\tilde{u} = \alpha_1 \phi_1 + \alpha_2 \phi_2 + \dots$$

α_j = coeficiente a determinar, que em alguns casos podem ser associados a valores nodais.

ϕ_j = funções linearmente independentes (conhecidas): Polinômios de Lagrange, Polinômios Hermitianos, Funções Trigonômicas, etc.

Pode-se escolher $\tilde{u}$, tal que:

a) $\tilde{u}$ satisfaz a equação diferencial no domínio, mas não satisfaz as condições de contorno

→ Método do Contorno.

b) $\tilde{u}$ satisfaz as condições de contorno, mas não satisfaz a equação diferencial no domínio

→ Método do Domínio

No caso em que $\tilde{u}$ já satisfaz as condições de contorno ($R_1 = R_2 = 0$; $R \neq 0$) tem-se os seguintes caminhos:

i) Método do Subdomínio (Subdomain Collocation Method).

Neste método, o domínio Ω é dividido em subdomínios (Ω_i) e a função peso W é tomada igual a um (1).

$$\int_{\Omega} RW d\Omega = 0 ; \quad \Omega = \Omega_1 + \Omega_2 + \dots$$

$$\Omega$$

$$\int_{\Omega_i} RW d\Omega = 0$$

$$\begin{array}{|c|c|} \hline \Omega_1 & \Omega_2 \\ \hline \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{l} W = 1 \text{ em } \Omega_1 \\ W = 1 \text{ em } \Omega_2 \end{array} \right\}$$

ii) Método de Galerkin (Galerkin Collocation Method)

Neste método, tanto a função de aproximação quanto a função peso são tomadas como combinação linearmente independente das funções de forma.

$$\tilde{u} = \sum C_i \phi_i$$

$$W = \sum \beta_i \psi_i \quad ; \quad \psi_i = \phi_i$$

$$\int R W d\Omega = 0$$

$$\beta_i \int R \psi_i d\Omega = 0$$

ii) Método Pontual (Point Collocation Method)

Neste método, a função peso é tomada como a função delta de Dirac:

$W = \psi_i = \Delta(x - x_j) \rightarrow$ função delta de Dirac, possui as seguintes propriedades:

$$\Delta(x - x_j) = \begin{cases} 0 ; \forall x \neq x_j \\ \infty ; \forall x = x_j \\ \int \Delta(x - x_j) d\Omega = 1 \end{cases}$$

$$\int R \Delta(x - x_j) d\Omega = 0 \quad (\text{resíduo zero em determinados pontos})$$

3- APLICAÇÃO: Seja a equação diferencial

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + x = 0 \quad ; \text{ em } x \in [0, 1] \text{ e } u = u(x)$$

As condições de contorno são:

$$\tilde{C}.C. \begin{cases} u = \tilde{u} = 0 & p / x = 0 \\ u = \bar{u} = 0 & p / x = 1 \end{cases}$$

Deseja-se obter a solução da equação.

→ Solução Exata: u

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = -x \Rightarrow \frac{d}{dx} \left(\frac{du}{dx} \right) = -x$$

$$d \left(\frac{du}{dx} \right) = -x dx \Leftrightarrow \frac{du}{dx} = -\frac{x^2}{2} + c \Leftrightarrow u = -\frac{x^3}{6} + cx + d$$

$$u = \bar{u} = 0 \text{ para } x = 0 \Rightarrow d = 0$$

$$u = \bar{u} = 0 \text{ para } x = 1 \Rightarrow c = -\frac{1}{6}$$

$$\Rightarrow u = \frac{x}{6} - \frac{x^3}{6} \quad (\text{solução analítica / fechada / exata})$$

→ Solução Aproximada: $\tilde{u}$

$$\tilde{u} = \alpha_1 \phi_1 + \alpha_2 \phi_2$$

$$\text{Polinômios de Hermite: } \left. \begin{aligned} \phi_1 &= x - 2x^2 + x^3 \\ \phi_2 &= x^3 - x^2 \end{aligned} \right\} ;$$

satisfaz as $\tilde{C}.C. \Rightarrow$ Método do Domínio

- Derivadas:

$$\left\{ \begin{aligned} \phi_1' &= 1 - 4x + 3x^2 \\ \phi_1'' &= -4 + 6x \end{aligned} \right. ; \left\{ \begin{aligned} \phi_2' &= 3x^2 - 2x \\ \phi_2'' &= 6x - 2 \end{aligned} \right.$$

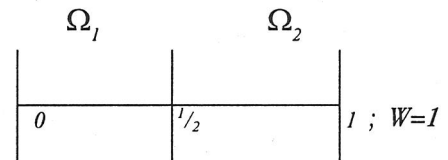
$$\left\{ \begin{aligned} R_1 &= u - \tilde{u} \text{ em } x = 0 \\ R_1 &= 0 \end{aligned} \right. ; \left\{ \begin{aligned} R_2 &= u - \tilde{u} \text{ em } x = 1 \\ R_2 &= 0 \end{aligned} \right. ; \quad R = ?$$

$$R(\alpha_1, \alpha_2, x) = \frac{d^2 \tilde{u}}{dx^2} + x \neq 0$$

$$\frac{d^2 \tilde{u}}{dx^2} = \alpha_1 \phi_1'' + \alpha_2 \phi_2''$$

$$R(\alpha_1, \alpha_2, x) = \alpha_1 (6x - 4) + \alpha_2 (6x - 2) + x$$

(i) Método do Subdomínio



Primeiro Domínio:

$$\Omega_1 : \int_0^{1/2} R \cdot 1 \, dx = 0 \Rightarrow \int_0^{1/2} [\alpha_1 (6x - 4) + \alpha_2 (6x - 2) + x] \, dx = 0 \Rightarrow \underbrace{-1.25 \alpha_1 - 0.25 \alpha_2 + 0.125}_{(I)} = 0$$

Segundo Domínio:

$$\Omega_2 : \int_{1/2}^1 R \cdot 1 \, dx = 0 \Rightarrow \int_{1/2}^1 [\alpha_1 (6x - 4) + \alpha_2 (6x - 2) + x] \, dx = 0 \Rightarrow \underbrace{0.25 \alpha_1 + 1.25 \alpha_2 + 0.375}_{(II)} = 0$$

Escrevendo as equações (I) e (II) na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} -1.25 & -0.25 \\ 0.25 & 1.25 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0.125 \\ -0.375 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \alpha_1 = \frac{1}{6} \\ \alpha_2 = -\frac{1}{3} \end{matrix} \parallel \rightarrow \tilde{u} = \alpha_1 \phi_1 + \alpha_2 \phi_2 \quad \Rightarrow \tilde{u} = \frac{x}{6} - \frac{x^3}{6} \equiv u$$

(i) Método de Galerkin

$$W = \beta_1 \psi_1 + \beta_2 \psi_2 \quad \psi_i \equiv \phi_i \quad \therefore \psi_1 = x - 2x^2 + x^3$$

$$\int_{\Omega} R W \, d\Omega = 0 \quad \psi_2 = x^3 - x^2$$

$$\int_{\Omega} R (\beta_1 \psi_1 + \beta_2 \psi_2) \, d\Omega = 0$$

$$\int_{\Omega} R \psi_1 \, d\Omega = 0 \Rightarrow \int_0^1 \left\{ [\alpha_1 (6x - 4) + \alpha_2 (6x - 2) + x] \cdot (x - 2x^2 + x^3) \right\} dx = 0 \Rightarrow \underbrace{-4\alpha_1 + \alpha_2 + 1}_{(I)} = 0$$

$$\int_{\Omega} R \psi_2 \, d\Omega = 0 \Rightarrow \int_0^1 \left\{ [\alpha_1 (6x - 4) + \alpha_2 (6x - 2) + x] \cdot (x^3 - x^2) \right\} dx = 0 \Rightarrow \underbrace{\alpha_1 - 4\alpha_2 - 1.5}_{(II)} = 0$$

Escrevendo as equações (I) e (II) na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1 \\ 1.5 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \alpha_1 = \frac{1}{6} \\ \alpha_2 = -\frac{1}{3} \end{matrix} \parallel$$

$$\tilde{u} = \alpha_1 \phi_1 + \alpha_2 \phi_2 \quad \tilde{u} = \frac{1}{6}(x - 2x^2 + x^3) - \frac{1}{3}(x^3 - x^2) \quad \Rightarrow \tilde{u} = \frac{x}{6} - \frac{x^3}{6} \equiv u$$

(i) Método Pontual

$$W = \Delta(x - x_j) \quad \int_{\Omega} R W \, d\Omega = 0$$

$$\int_{\Omega} R(\alpha_1, \alpha_2, x) \Delta(x - x_j) \, dx = 0$$

$$\left. \begin{matrix} x_1 = 0.25 \\ x_2 = 0.75 \end{matrix} \right\} \text{ pontos escolhidos dentro do intervalo}$$

$$R(\alpha_1, \alpha_2, x) \Big|_{x=0.25} = \underbrace{-10\alpha_1 - 2\alpha_2 + 1}_{=0} \quad R(\alpha_1, \alpha_2, x) \Big|_{x=0.75} = \underbrace{2\alpha_1 + 10\alpha_2 + 3}_{=0}$$

Escrevendo as equações (I) e (II) na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} -10 & -2 \\ 2 & 10 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -1 \\ -3 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{1}{6} \\ \alpha_2 &= -\frac{1}{3} \end{aligned} \parallel$$

$$\tilde{u} = \alpha_1 \phi_1 + \alpha_2 \phi_2$$

$$\tilde{u} = \frac{1}{6}(x - 2x^2 + x^3) - \frac{1}{3}(x^3 - x^2)$$

$$\Rightarrow \tilde{u} = \frac{x}{6} - \frac{x^3}{6} \equiv u$$

4- OBSERVAÇÃO

Da aplicação anterior percebe-se que a solução aproximada $\tilde{u}$ obtida pelos Métodos Numéricos, coincide com a solução exata u (analítica/ fechada) mostrando o poder da Técnica dos Resíduos Ponderados. Vale ainda ressaltar que nem sempre a solução de aproximação coincide com a solução exata, porém os valores pontuais da solução de aproximação $\tilde{u}$ são próximos ou iguais aos valores pontuais da solução exata u , (dependendo das funções de forma, atribuídas à solução de aproximação) na região do domínio ou na região do contorno conforme o método.

5- CONCLUSÕES

- (i) Os resultados numéricos representam um caminho alternativo e confiável na solução de equações diferenciais.
- (ii) As soluções numéricas são soluções aproximadas, porém permitem o controle de coincidirem com soluções exatas em determinadas regiões.

- (iii) Os métodos numéricos são ideais para serem processados em computadores.
- (iv) Quando a solução aproximada satisfaz a equação diferencial no domínio, mas não satisfaz as condições de contorno, diz-se que o método é de contorno.
- (v) Quando a solução aproximada satisfaz a equação diferencial no contorno, mas não satisfaz no domínio, diz-se que o método é de domínio.

6- BIBLIOGRAFIA CONSULTADA

- COIMBRA, J.R.C., BRAZ, S.F. **Introdução ao Método dos Elementos Finitos: Análise Plana**. Belém: UNAMA, s.d. 91p. Trabalho de Conclusão de Curso, Departamento de Engenharia Civil, Universidade da Amazônia.
- NOGUEIRA, L.M.F., PEREIRA, P.C.C. **Análise Estática de Esforços em Placas Delgadas**. Belém: UNAMA, s.d. 70p. Trabalho de Conclusão de Curso, Departamento de Engenharia Civil, Universidade da Amazônia.
- OÑATE, E. **Cálculo de Estructuras por el Método de Elementos Finitos: Análisis Elástico Lineal**. Barcelona: Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería, 1995.
- SILVA, S. F. **Comportamento Dinâmico de Placas de Reissner-Mindlin Utilizando o Elemento Finito Quadrilátero Lagrangeano de 16 Nós**. Brasília: UNB, 1998. 110p. Dissertação de Mestrado, Departamento de Engenharia Civil, Universidade de Brasília.