INTEGRAÇÃO NUMÉRICA : QUADRATURA DE GAUSS

Selênio Feio da Silva *

Resumo: O presente trabalho introduz um método alternativo para a resolução de integrais definidas, capaz de fornecer resultados exatos e ainda resolver integrais que não possuem solução analítica, como por exemplo integrais de matrizes.

1- INTRODUÇÃO

A idéia principal do Método da Quadratura Gaussiana, consiste em substituir a soma integral por uma soma discreta (somatório): $\int_{-1}^{+1} F(\xi)d\xi \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} F(\xi_i)W_i = {}^{n}I_G$; onde n é o número de pontos de integração (n $\in$ N), $F(\xi_i)$ corresponde ao valor da função no ponto de integração , ξ_i o valor da coordenada no ponto de integração e W_i o valor da função peso no ponto de integração.

2 -FORMULAÇÃO TEÓRICA

A idéia de substituir a soma integral por uma soma discreta na Quadratura de Gauss faz surgir uma função denominada função peso, cujo seu valor pontual é uma variável a determinar. Essa função tem o objetivo de distribuir a diferença entre o valor aproximado e o valor exato dentro do intervalo que se está trabalhando, para obter os valores pontuais dessa função peso, bem como as coordenadas associadas a ela, trabalha-se a princípio com uma função em que sua integral definida seja conhecida.

** Para Dois Pontos de Integração: $n = 2$*

$$^{2}I_G = \sum_{i=1}^{2} F(\xi_i)W_i = F(\xi_1)W_1 + F(\xi_2)W_2$$

Se $F(\xi) = \xi^k$ *; com* $k = 0, 1, 2, \ldots$ tem-se:

para $k = 0 \rightarrow \int_{-1}^{+1} \xi^0 d\xi = F(\xi_1)W_1 + F(\xi_2)W_2 = \xi_1^0 W_1 + \xi_2^0 W_2$

$$2 = W_1 + W_2 \qquad (1)$$

para $k = 1 \rightarrow \int_{-1}^{+1} \xi^1 d\xi = F(\xi_1)W_1 + F(\xi_2)W_2 = \xi_1^1 W_1 + \xi_2^1 W_2$

$$0 = W_1\, \xi_1 + W_2\, \xi_2 \qquad (2)$$

* Graduado em Engenharia Civil - UFPa; Mestrado em Estruturas - UnB; Professor Adjunto-I dos cursos de Engenharia Civil e Tecnologia em Processamento de Dados e Bacharelado em Ciência da Computação - UNAMA.

para $k = 2 \rightarrow \int_{-1}^{+1} \xi^2 d\xi = F(\xi_1)W_1 + F(\xi_2)W_2 = \xi_1^2\, W_1 + \xi_2^2\, W_2$

$$^2/_3 = W_1\, \xi_1^2 + W_2\, \xi_2^2 \qquad (3)$$

para $k = 3 \rightarrow \int_{-1}^{+1} \xi^3 d\xi = F(\xi_1)W_1 + F(\xi_2)W_2 = \xi_1^3\, W_1 + \xi_2^3\, W_2$

$$0 = W_1\, \xi_1^3 + W_2\, \xi_2^3 \qquad (4)$$

Com as equações: *(1), (2), (3)* e *(4)* monta-se um sistema de quatro equações com quatro incógnitas *(4 x 4)* e resolve-se o sistema encontrando os valores :

$$\begin{cases} W_1 + W_2 = 2 \\ W_1\, \xi_1 + W_2\, \xi_2 = 0 \\ W_1\, \xi_1^2 + W_2\, \xi_2^2 = \dfrac{2}{3} \\ W_1\, \xi_1^3 + W_2\, \xi_2^3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \qquad \begin{array}{l} W_1 = W2 = 1 \\ \xi_1 = -\dfrac{1}{\sqrt{3}} \\ \xi_2 = +\dfrac{1}{\sqrt{3}} \end{array} \quad ; \quad \text{portanto:}$$

$$^2I_G = F\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)1.0 + F\left(+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)1.0$$

* *Para Três Pontos de Integração: n = 3*

$^3I_G = \sum_{i=1}^{3} F(\xi_i)W_i = F(\xi_1)W_1 + F(\xi_2)W_2 + F(\xi_3)W_3$; seguindo o mesmo raciocínio anterior monta-se um sistema, agora *6 x 6*, e determina-se os valores das coordenadas e pesos:

$$\begin{array}{ll} W_1 = \dfrac{8}{9} & \xi_1 = 0 \\ W_2 = \dfrac{5}{9} & \xi_2 = +\dfrac{\sqrt{15}}{5} \\ W_3 = \dfrac{5}{9} & \xi_3 = -\dfrac{\sqrt{15}}{5} \end{array}$$

Portanto: $^3I_G = F(0)\dfrac{8}{9} + F\left(+\dfrac{\sqrt{15}}{5}\right)\dfrac{5}{9} + F\left(-\dfrac{\sqrt{15}}{5}\right)\dfrac{5}{9}$

Desta forma, obtém-se o valor da integral de Gauss para um determinado número de pontos utilizados, a *Tabela-1*, é construída usando esta idéia, mostrando as coordenadas e pesos da Quadratura de Gauss para alguns pontos de integração. Na literatura (por ex: *MENDOZA FAKHYE, R. J.*) é possível encontrar até para 20 pontos de integração (n = 20).

Tabela -1: Quadratura de Gauss – Coordenadas e Pesos

n	ξ_i	W_i
1	0.00000 00000 00000	2.00000 00000 00000
2	± 0.57735 02691 89626 $= \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$	1.00000 00000 00000
3	0.00000 00000 00000	0.88888 88888 88889 = 8 / 9
	± 0.77459 66692 41483 $= \pm \sqrt{\frac{3}{5}}$	0.55555 55555 55556 = 5 / 9
4	± 0.33998 10435 84856 $= \pm \sqrt{\frac{15 - 2\sqrt{30}}{35}}$	0.65214 51548 62546 $= \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{30}}{36}$
	± 0.86113 63115 94053 $= \pm \sqrt{\frac{15 + 2\sqrt{30}}{35}}$	0.34785 48451 37454 $= \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{30}}{36}$
5	0.00000 00000 00000	0.56888 88888 88889
	± 0.53846 93101 05683	0.47862 86704 99366
	± 0.90617 98459 38664	0.23692 68850 56189
6	± 0.23861 91860 83197	0.46791 39345 72691
	± 0.66120 93864 66265	0.36076 15730 48139
	± 0.93246 95142 03152	0.17132 44923 79170
7	0.00000 00000 00000	0.41795 91836 73469
	± 0.40584 51513 77397	0.38183 00505 05119
	± 0.74153 11855 99394	0.27970 53914 89277
	± 0.94910 79123 42759	0.12848 49661 68870
8	± 0.18343 46424 95650	0.36268 37833 78362
	± 0.52553 24099 16329	0.31370 66458 77887
	± 0.79666 64774 13627	0.22238 10344 53374
	± 0.96028 98564 97536	0.10122 85362 90376

3 - APLICAÇÕES

1- Calcular a integral: $\int_{-1}^{+1} (\xi^2 + \frac{\xi^3}{2})\, d\xi$, utilizando o mínimo de pontos necessários para que o resultado fornecido pela quadratura de Gauss seja exato.

** Quadratura de Gauss:*

$2n\text{-}1 = 3 \Rightarrow \quad n = 2$ *pontos de integração*

$$^2I_G = \sum_{i=1}^{2} F(\xi_i)W_i = F(\xi_1)W_1 + F(\xi_2)W_2,$$

$$\text{da Tabela -1:} \begin{cases} W_1 = W2 = 1 \\ \xi_1 = -\dfrac{1}{\sqrt{3}} \\ \xi_2 = +\dfrac{1}{\sqrt{3}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow {}^2I_G = F\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)1.0 + F\left(+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)1.0$$

$$F(\xi) = \xi^2 + \frac{\xi^3}{2}$$

$$F(1/\sqrt{3}) = \frac{1}{3} + \frac{1}{2}\frac{1}{3\sqrt{3}} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6\sqrt{3}}$$

$$F(-1/\sqrt{3}) = \frac{1}{3} - \frac{1}{6\sqrt{3}}$$

$$^2I_G = \frac{1}{3} + \cancel{\frac{1}{6\sqrt{3}}} + \frac{1}{3} - \cancel{\frac{1}{6\sqrt{3}}}$$

$$^2I_G = \frac{2}{3}$$

** Cálculo Analítico:*

$$\int_{-1}^{+1} (\xi^2 + \frac{\xi^3}{2})\, d\xi = \left(\frac{\xi^3}{3} + \frac{\xi^4}{8}\right)\Bigg|_{-1}^{+1}$$

$$\boxed{= (\frac{1}{3} + \cancel{\frac{1}{8}}) - (-\frac{1}{3} + \cancel{\frac{1}{8}}) = \frac{2}{3}}$$

2- Seja a função polinomial $F(X) = 1 + X + X^2 + X^3 + X^4$; calcular a integral exata de $F(X)$ entre os limites $-1 \leq X \leq 1$, em seguida fazer o cálculo utilizando a quadratura de Gauss com $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$ e $n = 4$ pontos de integração.

↳ Integral Exata:

$$\int_{-1}^{+1} F(X)\, dX = \left(X + \frac{X^2}{2} + \frac{X^3}{3} + \frac{X^4}{4} + \frac{X^5}{5} \right) \Bigg|_{-1}^{+1} = 3.0667$$

↳ Quadratura de Gauss:

a) Um ponto de integração: $n = 1$

$${}^{1}I_G = F(X_1)W_1 \text{ ; da Tabela 1 :} \begin{cases} X_1 = 0.0 \\ W_1 = 2.0 \end{cases}$$

$$\boxed{{}^{1}I_G = 1 \times 2 = 2}$$

b) Dois pontos de integração: $n = 2$

$${}^{2}I_G = F(X_1)W_1 + F(X_2)W_2 \text{; da Tabela 1 :} \begin{cases} X_1 = +\dfrac{1}{\sqrt{3}}, W_1 = 1.0 \\ X_2 = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}, W_2 = 1.0 \end{cases}$$

$$\boxed{{}^{2}I_G = 1(2.2142) + 1(0.6746) = 2.8889}$$

c) Três pontos de integração: $n = 3$

$${}^{3}I_G = F(X_1)W_1 + F(X_2)W_2 + F(X_3)W_3 \text{ ; da Tabela 1 :} \begin{cases} X_1 = 0.0, W_1 = \dfrac{8}{9} \\ X_2 = \dfrac{\sqrt{15}}{5}, W_2 = \dfrac{5}{9} \\ X_3 = -\dfrac{\sqrt{15}}{5}, W_3 = \dfrac{5}{9} \end{cases}$$

$$\boxed{{}^{3}I_G = \frac{8}{9} \times 1 + \frac{5}{9} \times 3.1994 + \frac{5}{9} \times 0.7206 = 3.0667}$$ *"corresponde ao valor exato"*

d) Quatro pontos de Integração: $n = 4$

$$^{3}I_G = F(X_1)W_1 + F(X_2)W_2 + F(X_3)W_3 + F(X_4)W_4\ ;$$

$$\text{da Tabela 1}: \begin{cases} X_1 = 0.86113631 & W_1 = 0.34785485 \\ X_2 = -0.86113631 & W_2 = 0.34785485 \\ X_3 = 0.33998104 & W_3 = 0.65214515 \\ X_4 = -0.33998104 & W_4 = 0.65214515 \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{aligned} {}^{4}I_G &= 0.34785485\ x\ 3.7912 + 0.34785485\ x\ 0.7917 + \\ &+ 0.65214515\ x\ 1.5082 + 0.65214515\ x\ 0.7497 = 3.0667 \end{aligned}}$$

"corresponde ao valor exato"

OBSERVAÇÕES

1- n pontos de integração são suficientes para integrar um termo polinomial de ordem (2n-1) (ver aplicação 1).

2- Na Quadratura Gaussiana, se utilizarmos menos pontos de integração que o necessário o resultado será errado; e mais pontos que o necessário o resultado continuará correto (ver aplicação 2)

4 - BIBLIOGRAFIA CONSULTADA

ESCUDERO, A. A. G., **Investigação de Modelos Computacionais de Cascas usando o Método de Elementos Finitos**. Brasília, D.F.: Universidade de Brasília, s.d. 217p. (Dissertação de Mestrado, publicação EDM 009º/97.)

MENDOZA FAKHYE, R. J., **Análise Comparativa de Técnica de Cálculo Numérico de Integrais Singulares no Método de Elementos de Contorno**. Brasília: Universidade de Brasília, s.d. 97p. (Dissertação de Mestrado, Publicação EDM 07ª/98, Departamento de Engenharia Civil.)

OÑATE, E., **Cálculo de Estructuras por el Método de Elementos Finitos: Análisis Elástico Lineal**. Barcelona: Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería, 1995.

SILVA, S. F. Comportamento Dinâmico **de Placas de Reissner-Mindlin Utilizando o Elemento Finito Quadrilátero Lagrangeano de 16 Nós**. Brasília: Universidade de Brasília (Dissertação de Mestrado, Publicação EDM 002ª/98, Departamento de Engenharia Civil), 110 p.