

## GEOMETRIA FRACTAL?!



(1)

### **Pedro Franco de Sá (1).**

Licenciado em Matemática UFPA, Mestre em Matemática (UFPA) e Doutor em Educação Matemática da UFRN e Professor do Curso de Matemática da UEPA e do Curso de Matemática e Engenharia Civil da UNAMA.

### **José Luiz Soares Luz (2).**

Licenciado em Matemática UNAMA e Mestre em Matemática IMPA.



# GEOMETRIA FRACTAL?!

**RESUMO:**

Neste artigo apresentamos as idéias principais da Geometria Fractal, Geometria que descreve melhor a natureza devido representar de maneira mais fidedigna as reentrâncias inerentes do mundo real, destacando a auto-similaridade, as dimensões fractais e os fractais clássicos. Os construtores da Geometria Fractal são também destacados durante a apresentação do trabalho, além disso apresentamos um quadro sinóptico do desenvolvimento da Geometria Fractal.

Encontramos na natureza diversas formas geométricas, as quais são difíceis de serem descritas pela geometria tradicional Euclidiana, através de linha, círculos, esferas, etc.; suas formas apresentam uma maior complexidade, que necessita de uma nova linguagem para descrevê-las, surge então a Geometria Fractal ou Geometria da Natureza.

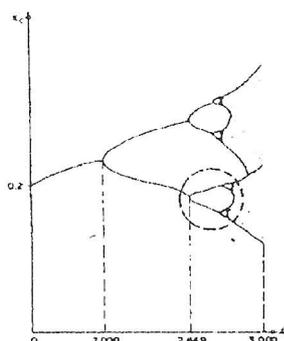
Costumamos ter dificuldades em compreender a suposta desordem dos sistemas aperiódicos típicos da natureza e da sociedade, como a turbulência dos fluídos, variações da economia, transformações meteorológicas, crescimento de populações, o crescimento de uma planta, a geometria das montanhas que resulta de atividades tectônicas e erosão, e muitos outros fenômenos que escapam das famosas condições normais de temperatura e pressão, e apresentam algumas propriedades básicas: não-linearidade, complexidade e fractalização, tais fenômenos podem ser descritos através de determinadas formas estruturais, definidas a partir de regras precisas procedentes de comportamentos aparentemente aleatórios e imprevisíveis. Os sistemas que variam com uma certa aleatoriedade, assim como aqueles que variam com o tempo de forma

determinística, são ambos tecnicamente conhecidos como sistemas dinâmicos; e na visualização do comportamento de tais sistemas surgem formas que podemos chamar de fractais.

O termo fractal provém da palavra latina *fractus* que significa fragmentado, irregular, partido, e foi definido no final da década de 70 pelo matemático Benoît Mandelbrot do Centro de Pesquisas Thomas J. Watson da IBM, para descrever os sistemas com dimensão fracionária. O trabalho de Mandelbrot baseou-se nos estudos de pesquisadores tais como: Verhulst, Julia, Poincaré, Fatou, dentre outros; trabalho esse que só foi possível graças às facilidades proporcionadas pelos computadores.

Os estudos de Verhulst, preocupavam-se com a dinâmica dos sistemas ecológicos, especialmente no que se relaciona com o crescimento-limite de populações; ele em seu modelo, utilizava equações algébricas recursivas, ou seja, alimentadas com os próprios números gerados. Mediante os resultados obtidos por Verhulst, os biólogos-matemáticos Steve Smale e Robert May, com a ajuda de um computador IBM, construíram um gráfico onde detectaram bifurcações, verificou-se

posteriormente que quando se ampliava numericamente determinadas regiões do gráfico, surgiam sucessivas e infinitas bifurcações, com o mesmo formato geométrico invariante por escala. Esta característica dos sistemas dinâmicos provavelmente despertou a atenção de Mandelbrot, e utilizando-se de um computador, e dos estudos nos domínios dos complexos de Pierre Fatou e Gaston Julia, encontrou verdadeiras obras de arte, e edificou a Teoria dos *Fractais*.



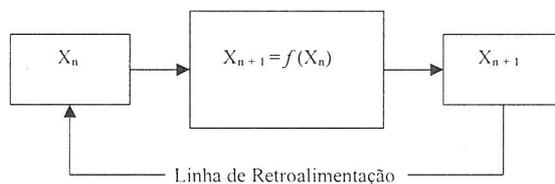
## AUTOSIMILARIDADE E RECURSIVIDADE

Ao analisarmos um fractal, verificamos que ao escolhermos determinadas partes e ampliando-as, são idênticas ao sistema fractal como um todo, temos assim fragmentos geométricos *similares* repetindo-se de tal forma, que se mantêm invariantes em qualquer escala, a esta propriedade geométrica de manter seu formato independentemente da ampliação, denominou-se *autosimilaridade*.

Para a representação de um fractal, necessitamos criar uma rotina, que utilize uma determinada forma geométrica, fazendo-a repetir-se de forma recursiva em diferentes escalas, para uma melhor compreensão analisemos o princípio de uma máquina com retroalimentação (feedback).



Temos uma determinada informação na entrada que após um determinado processo fornece uma nova informação na saída, a qual é reutilizada como nova entrada, e assim sucessivamente até a interrupção do processo. Imaginemos agora que temos um sistema que processe números, caracterizado pela interação de uma fórmula  $x_{n+1} = f(x_n)$ , onde  $f(x_n)$ , pode ser uma função de  $x$ , que requer um número como entrada e retorne um novo número na saída, que será o resultado da fórmula controlada por um determinado parâmetro, mas em qualquer caso a saída depende somente da entrada, e os índices dos números ajudarão a manter um controle das vezes que o processo se repetirá, essa idéia está descrita no esquema abaixo.



A rotina para a criação de um fractal, funciona de modo similar ao sistema de retroalimentação, aplicando o princípio da recursividade às formas geométricas, isto é, no final da execução de um algoritmo de criação de uma estrutura o mesmo é executado novamente, criando assim uma estrutura similar.

## DIMENSÃO FRACTAL

Determinadas quantidades na natureza, podem ser bem expressas através de números inteiros, como por exemplo o

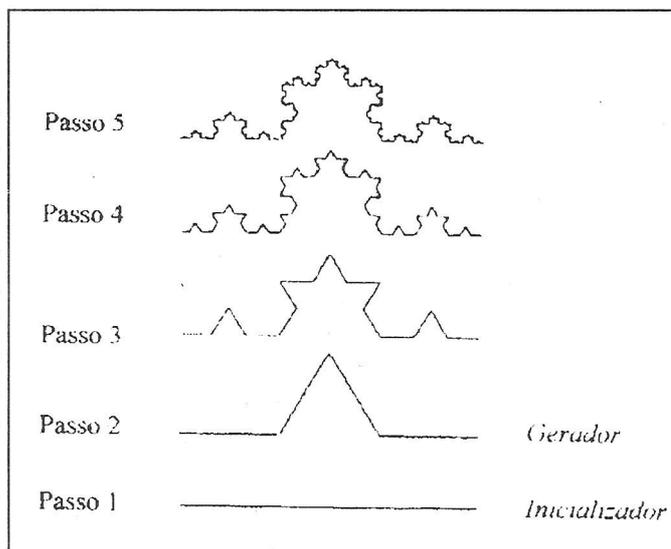
número de carros em um estacionamento, o número de filhos de um casal, os gols em uma partida de futebol, as dimensões de um determinado objeto, como por exemplo um dado que é tridimensional enquanto que sua sombra é bidimensional; isto nos remete a algumas noções matemáticas conhecidas dentro da geometria euclidiana: *ponto*, dimensão 0; *reta*, dimensão 1; *plano*, dimensão 2, dentre outras. Porém, no final do século XIX, os matemáticos aparentemente descobriram estruturas com dimensões fracionárias, ou seja, faltavam a essas estruturas algumas das propriedades associadas a formas geométricas simples *uni*, *bi* e *tridimensionais*; mas somente no século XX, através de Mandelbrot percebeu-se que a representação de muitos dos sistemas encontrados na natureza e no cotidiano têm dimensões fracionárias.

Podemos dizer que a dimensão fractal é uma medida do grau de irregularidade e fragmentação, chamemos de  $D$  a dimensão de autosimilaridade, pois em alguns casos usamos o símbolo  $D_s$ , com o intuito de evitar confusão com outras versões da dimensão fractal, que pode ser uma fração simples ou mesmo um número irracional; então dada uma estrutura autosimilar, existe uma relação entre o fator de redução  $S$ , e o número de pedaços  $a$  dentre os quais a estrutura pode ser dividida.

$$a = \frac{1}{s^D} \text{ ou } D = \frac{\ln a}{\ln(1/s)}$$

Como exemplo vamos utilizar uma estrutura denominada *Curva de Koch*, comecemos com uma linha reta. Este objeto inicial chamaremos de *inicializador*; dividindo-a em três partes iguais, então substituiremos o terço central por um triângulo equilátero e removemos a sua

base. Isto completa a fase de construção básica. A redução desta figura, composta de 4 partes, será reutilizada nos estágios seguintes, e é chamada de *gerador*. Deste modo tomamos cada segmento da reta resultante, dividimos em três partes iguais, e assim por diante como mostra a figura.



Consideremos uma reta dividida em 4 partes, teríamos então  $a = 4$  e  $s = 1/4$ , obtendo-se  $D = 1$ , um resultado já conhecido sobre a dimensão de uma reta. Será então que a Geometria Euclidiana seria um caso particular na Geometria dos Fractais?

Existem outras definições de dimensão fractal, que são úteis em situações distintas, na tabela a seguir temos uma descrição de algumas dessas dimensões.

## FRACTAIS CLÁSSICOS

Embora atualmente tenhamos verdadeiras obras de arte, feitas a partir de fractais, estruturas com características semelhantes retomam os trabalhos de matemáticos do passado, como Georg

NOME	O QUE MEDE?	NOTAÇÃO	DEFINIÇÃO	OBSERVAÇÕES
Topológica	O número de direções linearmente independentes de um espaço.	$d_T$	Número mínimo da união de subconjuntos de tamanho arbitrariamente pequenos utilizados para cobrir o espaço de maneira que cada ponto esteja contido em no máximo $d_{T+1}$ desses subconjuntos.	Não depende das características métricas do espaço. É um número inteiro positivo.
Auto-similaridade	O número de novas partes geometricamente similares ao objeto todo são observados quando a resolução é aumentada.	$d_{\text{auto-similaridade}}$	$d_{\text{auto-similaridade}} = \log N / \log F$ , onde F é o fator de escala e N é número de novas partes auto-similares.	Pode não ser um número inteiro. A dimensão de auto-similaridade é uma generalização da dimensão topológica.
Capacidade.	O quanto o conjunto ou objeto considerado preenche o espaço em que está imerso.	$d_{\text{cap}}$ ou $D_0$	$D_0 = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \{ [\log N(\epsilon)] / \log(1/\epsilon) \}$	É uma generalização da dimensão de auto-similaridade. Depende somente das características métricas do espaço. A dimensão topológica é menor ou igual à dimensão de capacidade.
Informação.	O quanto o conjunto ou objeto considerado preenche o espaço em que está imerso.	$d_I$ ou $D_1$	$D_1 = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \{ I(\epsilon) / \log(1/\epsilon) \}$ Onde $I(\epsilon) = \{ \sum_{i=1}^{N(\epsilon)} P_i \log(1/P_i) \}$ e $P_i$ é a probabilidade de se ter dois pontos do fractal na mesma bola.	A dimensão de informação é uma generalização da dimensão de capacidade.
Correlação.	O número de pontos que estão a uma distância menor que $\epsilon$ de um dado ponto.	$d_{\text{con}}$ ou $D_2$	$D_2 = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \{ \log C(\epsilon) / \log \epsilon \}$ Onde $C(\epsilon) = \lim_{N \rightarrow \infty} \{ (1/N^2) \sum_{i,j} \Theta(\epsilon -  x_i - x_j ) \}$	Depende das correlações espaciais entre os pontos do conjunto. $d_I \geq d_{\text{con}}$
Lyapounov.	O comportamento temporal dos sistemas dinâmicos.	$d_L$	$d_L = 1 + \lambda_1 /  \lambda_2 $ , para duas dimensões.	Depende dos coeficientes de Lyapounov.
Generalizada.	As características da estrutura de fractais não homogêneos em sua invariância por escala.	$d_{\text{gen}}$ ou $D_q$	$D_q = [1/(q-1)] \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \{ \log [ \sum_{i=1}^{N(\epsilon)} p_i^q ] / \log(\epsilon) \}$	Caracteriza o conjunto através de um espectro de dimensões.

Cantor (1872), Helge Von Koch (1904), Waclaw Sierpinski (1916), David Hilbert (1891), Giuseppe Peano (1890), dentre outros. De fato, as criações desses matemáticos influenciaram o conceito de Mandelbrot de uma nova geometria, entretanto eles não pensavam que seus estudos serviriam como passos conceituais em direção de uma nova percepção ou de uma nova geometria da natureza.

## CONJUNTO DE CANTOR

Georg Cantor foi um matemático alemão da Universidade de Halle, onde realizou trabalhos importantes nos fundamentos de matemática que hoje chamamos de *Teoria dos Conjuntos*.

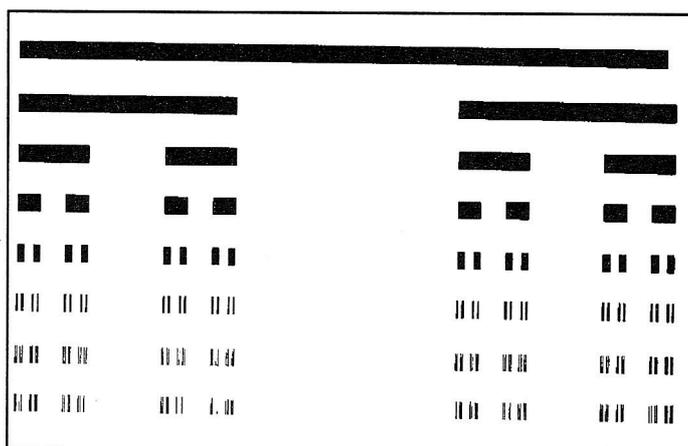
O conjunto de Cantor foi publicado pela primeira vez em 1883, e surgiu como um exemplo de certos conjuntos especiais.

Podemos dizer que dentre os primeiros fractais, o conjunto de Cantor é o mais importante, ainda que possua um menor apelo visual, basicamente é um conjunto infinito de pontos em um intervalo unitário  $[0,1]$  o qual pode ser interpretado como um conjunto de certos números, como por exemplo  $0, 1, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{9}, \frac{2}{9}, \dots$  nos preocuparemos aqui mais com a sua construção clássica.

Iniciamos com o intervalo fechado  $[0,1]$ , agora removemos o intervalo aberto  $]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}[$ , ou seja, removemos o terço central do intervalo inicial, porém não os números  $\frac{1}{3}$  e  $\frac{2}{3}$ . E isto nos deixa dois intervalos fechados  $[0, \frac{1}{3}]$  e  $[\frac{2}{3}, 1]$ , de comprimento  $\frac{1}{3}$  cada (isso completa o passo inicial da construção). Agora, vamos repetir o processo com os intervalos  $[0, \frac{1}{3}]$  e  $[\frac{2}{3}, 1]$  removendo os seus terços centrais, o que resulta em intervalos de comprimento  $\frac{1}{9}$ , continuando neste caminho, há um processo de *feedback* no qual a seqüência de intervalos é gerada. Temos então um intervalo no estágio inicial, dois depois do primeiro passo, quatro depois do segundo, oito depois do terceiro, e assim por diante, ou seja,  $2^n$  intervalos de comprimento  $\frac{1}{3^n}$  depois de  $n$  passos.

A dimensão de auto-similaridade do conjunto de Cantor é dada por  $\log_2/\log_3 \approx 0,6$ .

O comprimento do conjunto de

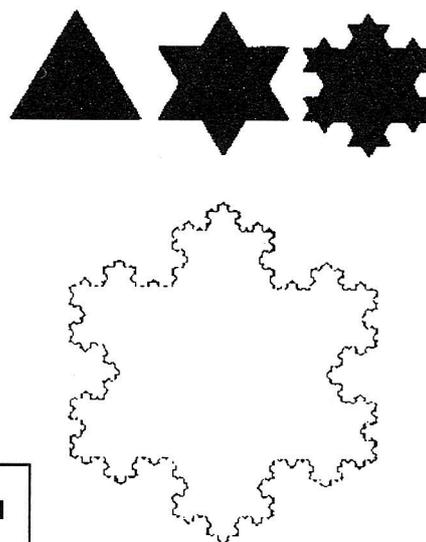


Cantor é zero pois, a cada etapa do processo, seu comprimento é reduzido por um fator  $\frac{2}{3}$ . Portanto, seu comprimento  $C$ , quando  $n$  tender ao infinito, será dado por  $L = \lim (2/3)^n = 0$ .

## CURVA DE KOCH

Helge von Koch foi um matemático sueco que em 1904 apresentou o que nos conhecemos por curva de Koch, a qual origina a figura chamada de *floco de neve* ou *ilha de von Koch*.

A construção da curva de Koch já foi descrita anteriormente, vamos então descrever um processo para formação da ilha de Koch, a partir de uma ilha da forma de triângulo equilátero. Substituímos o terço



central de cada um dos lados de comprimento unitário por um cabo em forma de triângulo equilátero, cujos lados medem  $\frac{1}{3}$ . Obtemos assim um hexágono regular estrelado ou estrela de David, cujo perímetro tem um comprimento de

4 unidades, repete-se o procedimento para cada um dos 12 lados, e assim sucessivamente, até formar a figura chamada de ilha de Koch.

Pouco se sabe sobre von Koch, cujas contribuições matemáticas não são certamente da mesma categoria de outras como Cantor, Sierpinski ou Hilbert, mas suas construções devem ter inspirado imensamente Mandelbrot. A curva de Koch como o nome já expressa é uma curva, mas isto não fica imediatamente claro a partir da sua construção, além disso poderíamos ver seus segmentos como se fossem retas cuidadosamente dobradas, o que lhe dá muito da complexidade que vemos nas costas litorâneas, dobras dentro de dobras dentro de dobras, e assim por diante. A dimensão da curva de Koch é aproximadamente 1,2619.

## CÁLCULO DA ÁREA DA ILHA DE KOCH

Os fractais como a ilha de Koch são obtidos por processos de construções. Estes processos para serem ideais, nunca deveriam terminar. Qualquer estágio finito do processo produz um objeto o qual terá sua estrutura tão perfeita quanto maior for o número de repetições; mas ainda estará longe de ser um verdadeiro fractal, pois este somente existe como uma idealização, seria o que obteríamos se conduzíssemos o processo indefinidamente, em outras palavras isto significa que são limites que freqüentemente conduzem para novas quantidades, objetos ou qualidades.

Consideremos a série geométrica para um dado número  $q$  ( $-1 < q < 1$ ),

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = 1 + q + q^2 + q^3 + \dots$$

A qual terá um limite, que para ser calculado necessitam de um valor dado por,  $S_n = 1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^n \Rightarrow S_n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$ , e

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = \frac{1}{1 - q}$$

Vamos agora calcular a área da ilha de Koch, lembrando os passos da sua construção, temos:

**Primeiro passo:** escolhemos o triângulo equilátero de lado  $a$ .

**Segundo passo:** reduzimos o triângulo equilátero por um fator  $1/3$  e colamos 3 cópias dos pequenos triângulos resultantes nos terços centrais de cada lado. Agora temos uma ilha limitada por 3.4 segmentos de reta, cada um com comprimento  $a/3$ .

**Terceiro passo:** reduzimos o triângulo por um fator  $1/3 \cdot 1/3$  e colamos 3.4 cópias dos pequenos triângulos resultantes nos terços centrais dos 12 segmentos obtidos no segundo passo, resultando em uma ilha com 3.4.4 segmentos de reta, com comprimento  $1/3 \cdot 1/3 \cdot a$ . E assim sucessivamente em diversos passos.

Vamos agora tentar entender a quantidade de área que adicionamos em cada passo. No começo temos a área  $A_1$  do triângulo inicial,  $A_1 = A_1 = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot a^2$ . Em cada

passo  $k$  adicionamos a área de  $n_k$  pequenos triângulos com lados  $S_k$ . Temos então  $n_1 = 3$ ,  $n_2 = 3.4$ ,  $n_3 = 3.4.4$ , ...,  $n_k = 3.4^{k-1}$ . Os lados  $S_k$  são obtidos pela redução dos lados do triângulo original por um fator  $1/3^k$ , ou

seja,  $S_k = \left(\frac{1}{3}\right)^k \cdot a$ . Assim temos:

$$A_{k+1} = A_k + n_k \frac{\sqrt{3}}{4} S_k^2$$

$$A_{k+1} = A_k + 3 \cdot 3^{k-1} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{1}{3^k} \cdot a^2$$

$$A_{k+1} = A_k + \frac{\sqrt{3}}{12} \cdot \left(\frac{4^{k-1}}{9^{k-1}}\right) \cdot a^2$$

$$A_{k+1} = A_k + \frac{\sqrt{3}}{12} \cdot \left(1 + \frac{4}{9} + \frac{4^2}{9^2} + \dots + \frac{4^{k-1}}{9^{k-1}}\right) \cdot a^2$$

A expressão entre parênteses é a soma parcial da série geométrica

$1 + \frac{4}{9} + \frac{4^2}{9^2} + \frac{4^3}{9^3} + \dots$ , cujo limite é dado

por  $\frac{1}{1 - 4/9} = \frac{9}{5}$ , logo teremos

$$A = A_1 + \frac{\sqrt{3}}{12} \cdot \frac{9}{5} \cdot a^2,$$

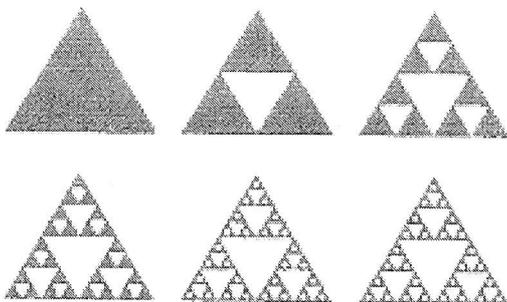
onde  $A = \frac{2}{5} \cdot \sqrt{3} \cdot a^2$

**TRIÂNGULO DE SIERPINSKI**

Este fractal é aproximadamente 40 anos mais jovem que o conjunto de Cantor e foi apresentado pelo matemático polonês Waclaw Sierpinski.

Sierpinski era um dos mais influentes matemáticos do seu tempo na Polônia e tinha reputação mundial, até uma das crateras da lua foi batizada com seu nome.

A construção básica do triângulo de Sierpinski começa com um triângulo equilátero (totalmente preenchido) no plano, sobre o qual aplicamos sistemas repetitivos de operações. Tomamos os pontos médios dos três lados, que juntos com os vértices



do triângulo original formam quatro triângulos congruentes, dos quais retiramos o central, isto conclui o processo básico de construção. Temos então três triângulos congruentes, cujos lados medem metade do lado do triângulo original. E repetimos o processo tantas vezes quanto desejar, ou seja, começamos com um triângulo e produzimos outros 3, 9, 27, 81, 243, ... triângulos.

No processo de construção de Sierpinski, de cada uma das três partes que obtemos com determinado passo  $k$ , ela é uma versão reduzida de um fator 2 de estrutura inteira da fase anterior. A dimensão do triângulo de Sierpinsky é aproximadamente 1,58.

**CÁLCULO DA ÁREA DO TRIÂNGULO DE SIERPINSKI**

Vamos agora tentar entender a área do triângulo de Sierpinski. No começo temos a área  $A_1$  do triângulo

inicial,  $A_1 = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot a^2$ . Em cada passo  $k$

subtraímos a área de  $n_k$  pequenos triângulos com lados  $S_k$ . Temos então  $n_1 = 1$ ,  $n_2 = 3$ ,  $n_3 = 3 \cdot 3$ , ...,  $n_k = 3 \cdot 3^{k-1}$ . Os lados  $S_k$  são obtidos pela redução dos lados do triângulo original por um fator  $\frac{1}{2}$ , ou seja

$S_k = \left(\frac{1}{2}\right)^k \cdot a = \left(\frac{1}{2^k}\right) \cdot a$ . Desse modo, temos:

$$A_{k+1} = A_k - n_k$$

$$A_{k+1} = A_k - 3 \cdot 3^{k-1} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{1}{2^{2k}} \cdot a^2$$

$$A_{k+1} = A_k - 3 \cdot 3^{k-1} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a^2}{4^k}$$

$$A_{k+1} = A_k - \frac{3^k}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a^2}{4^k}$$

$$A_{k+1} = A_k - \frac{\sqrt{3}}{12} \cdot \left(\frac{3^k}{4^k}\right) \cdot a^2$$

$$A_{k+1} = A_1 - \frac{\sqrt{3}}{12} \cdot \left(\frac{3}{4} + \frac{9}{16} + \frac{27}{64} + \dots + \frac{3^k}{4^k}\right) \cdot a^2$$

A expressão entre parênteses é a soma parcial da série geométrica  $\frac{3}{4} + \frac{9}{16} + \frac{27}{64} + \dots$ , cujo limite é dado por  $\frac{\frac{3}{4}}{1 - \frac{3}{4}} = 3$ , logo teremos  $A =$

$$A_1 \frac{\sqrt{3}}{12} \cdot 3 \cdot a^2, \text{ onde } A_1 = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot a^2 \Rightarrow A = 0.$$

Caso desejássemos a área um número  $n$  de passos, teríamos que  $\frac{3}{4} + \frac{9}{16} + \frac{27}{64} + \dots + \frac{3^n}{4^n}$ , seria a soma de um PG finita de termos, o termo geral seria dado por

$$S_n = \frac{a_1(1 - q^n)}{(1 - q)} = \frac{3/4 \cdot \left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n\right) \cdot a^2}{1/4} = 3 \left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n\right), \text{ o}$$

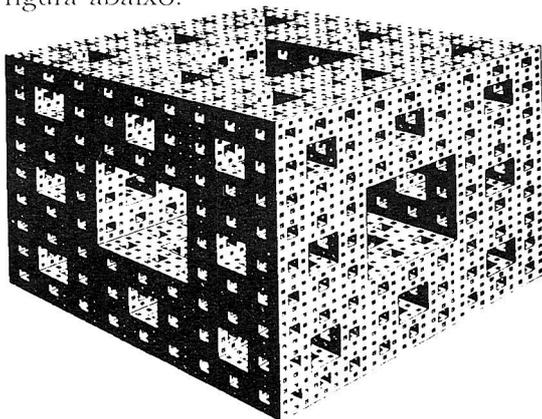
que resultaria na área dada por

$$A = A_1 - \frac{\sqrt{3}}{12} \left(3 \cdot \left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n\right)\right) \cdot a^2 = A_1 - \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot a^2 \left[1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n\right]$$

$$A = A_1 - A_1 \left[1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n\right] = A_1 \left[1 - \left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n\right)\right] = A_1 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^n$$

**A ESPONJA DE MENGER**

A esponja de Menger é um fractal obtido a partir de um cubo, de onde são retirados sistematicamente outros cubos de modo semelhante ao que é feito na construção do triângulo de Sierpinski. O resultado desse procedimento é uma figura com muitos furos, como podemos ver na figura abaixo.



*Esponja de Menger*

A dimensão fractal de esponja de Menger é 2,727 aproximadamente. Isso justifica porque a esponja de Menger tem sua área tendendo para o infinito e seu volume tendendo a zero.

**CONJUNTO DE JULIA**

Gaston Julia tinha somente 25 anos quando publicou as 199 páginas de sua obra prima em 1918. Durante a primeira guerra mundial, como soldado francês, foi seriamente machucado o que resultou na perda de seu nariz. O que o levou a conduzir suas pesquisas matemáticas dentro de um hospital.

Embora Julia fosse um matemático famoso, em 1920 seu trabalho foi esquecido até ter sido alvo dos estudos de Mandelbrot no final da década de 70. Este conheceu o trabalho de Julia através de seu tio Szolem Mandelbrojt que era seu professor de Matemática em Paris, por volta de 1945.

De início, o trabalho de Julia não despertou interesse de Mandelbrot, somente por volta de 1977, depois de ter se dedicado as mais diversas ciências, Mandelbrot mostrou com o auxílio de um computador que o trabalho de Julia é uma fonte dos mais belos fractais conhecidos hoje.

**APLICAÇÕES**

A distância entre a Matemática pura e sua aplicação é cada vez menor, os fractais não são obras de arte sem sentido, mas encontra repercussão nos mais diversos ramos da ciência a das artes. Muitas pesquisas têm sido desenvolvidas baseadas nas características dos fractais, por exemplo a forma como a quantidade de informações é armazenada dentro do DNA talvez utilize uma estrutura fractal; órgãos como os pulmões, rins e veias talvez sejam estruturas

com características fractais; as condições climáticas de nosso planeta que com a variação de determinados parâmetros apresenta um comportamento caótico, mas que pode ser analisado a partir de determinadas curvas, as quais quando cortadas por uma reta em determinadas regiões originam um *conjunto de Cantor*.

### CONSIDERAÇÕES FINAIS

Os fractais não são somente belas figuras obtidas com o auxílio do computador, também encontram aplicações das mais diversas. Os *pitagóricos* diziam “*tudo é número*”, porém não conseguiram estabelecer todas as relações entre o mundo real e os números, e os fractais surgem mostrando como a natureza em si pode ser compreendida a partir de formas

geométricas, repetindo-se em um processo sem fim através de expressões numéricas. Euclides quando escreveu os *Elementos*, jamais poderia imaginar aonde o homem chegaria usando o computador, hoje ele é capaz de estudar formas com comprimento infinito e área nula, área infinita e volume nulo, por mais paradoxal que seja, talvez estejamos começando a compreender infinitamente, a linguagem como mundo a nossa volta se expressa.

Como toda construção do conhecimento é histórica não podemos imaginar que Mandelbrot tenha feito sozinho a façanha da construção do conceito de fractais, coisa que ele nunca afirmou, desta forma encerraremos esta trabalho com um quadro demonstrativo de alguns físicos e matemáticos que contribuíram com pioneirismo para construção da geometria fractal.

PESQUISADOR	ANO	ÁREA	CONTRIBUIÇÃO
J. H. Lambert	1761	Física	Modelo de universo hierárquico
J. F. W. Herschel	1848	Física	
B. Riemann	1862	Matemática	Curvas que são contínuas, mas que não têm derivada em nenhum ponto.
K. Weierstrass	1872	Matemática	
R. A. Proctor	1871	Física	Aglomerados galácticos em níveis hierárquicos.
E. E. Fournier d'Albe	1907	Física	
H. J. Smith	1875	Matemática	O Conjunto de Cantor.
G. Cantor	1883	Matemática	
G. Peano	1890	Matemática	Curvas que preenchem o plano.
H. von Koch	1904	Matemática	Curva de Koch.
J. Perrin	1909	Física	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Experimentos com movimento browniano.</li> <li>• Filosofia das curvas irregulares.</li> </ul>
H. Poincaré	1911	Matemática	Dimensão topológica
Brouwer	1913	Matemática	
W. Sierpinsky	1916	Matemática	Triângulo de Sierpinsky

PESQUISADOR	ANO	ÁREA	CONTRIBUIÇÃO
G. Julia	1919	Matemática	Conjuntos obtidos por iterações no plano complexo.
C. V. L. Charlier, F. Selety, E. Borel, M. Amoroso Costa e P. Levy.	1922	Física	Universos newtonianos infinitos, fractais, com densidade média nula e com potencial gravitacional finito.
L. F. Richardson.	1922 1961	Física	•Turbulência envolve uma “cascata” de energia de grandes para pequenos vórtices; •Comprimento de linhas costeiras.
A. S. Besicovith.	1935	Matemática	Idéia da dimensão de fractal.
A.N. Kolmogorov.	1941	Física	•Auto-similaridade e “cascata” de energia na turbulência; • A dimensão de capacidade.
B. Mandelbrot.	1975	Matemática	A geometria fractal da natureza.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

CAOS & Fractais: What the hell are those?. Disponível em: <<http://www.geocities.com/vienna/9128/caosfrl.htm>>

LORENZ, N. E. **A essência do caos**. Brasília: Universidade de Brasília, 1996.

GUEDES, E. M. **Geometria fractal**: que geometria é essa?. São Leopoldo, 1998. Minicurso ( VI ENEM)- UNISINOS.

MANDELBROT, B. **Objetos fractuais**: forma, acaso e dimensão. Lisboa: Grávida, 1991.

MOREIRA, I. C. Fractuais. In: NUSSENZVEIG, G. H. M. (org.). **Complexidade & Caos**. Rio de Janeiro: UFRJ/COPEA, 1999.

KASNER, E.; NEWMAN, J. **Matemática e imaginação**. 2. ed. Rio de Janeiro: Zahar, 1976.

PEITGEN, H.; JURGENS, H.; SAUPE, D. **Fractals for classroom, part one, introduction to fractals and chãos**. New York: Springer-Verlag, 1993.

RICIERI, A. P. **Fractais e caos**: a matemática de hoje. São Paulo: Prandiano, 1990.