

A CONSTRUÇÃO DO CONCEITO DE FUNÇÃO: ALGUNS DADOS HISTÓRICOS.



(1)

Pedro Franco de Sá (1).

Licenciado em Matemática UFPA, Mestre em Matemática (UFPA) e
Doutor em educação Matemática UFRN e Professor do curso de Matemática da UNAMA/UEPA e
Engenharia Civil da UNAMA.

Glageane da Silva Souza (2).

Licenciada em Matemática pela UEPA, e Mestranda em Matemática UFPB

Isaac Dayan Bastos da Silva (3).

Licenciado em Matemática pela UEPA, e Mestranda em Matemática UFPB

A CONSTRUÇÃO DO CONCEITO DE FUNÇÃO: ALGUNS DADOS HISTÓRICOS

RESUMO:

Neste artigo é feito um estudo sobre a Construção Histórica do conceito de função, destacando a contribuição de muitos estudiosos que na busca de resolverem problemas de diversas origens desenvolveram o conceito, a notação e classificação das funções que hoje são as principais ferramentas dos matemáticos e de pesquisadores nas mais diversas áreas do conhecimento.

A idéia de funcionalidade de uma certa maneira não é recente na mente humana, por exemplo, quando o homem levado pela necessidade, passou a associar uma pedra a cada animal visando ao controle de seu rebanho, poderíamos encarar essa relação de dependência entre as pedras e os animais como uma relação funcional.

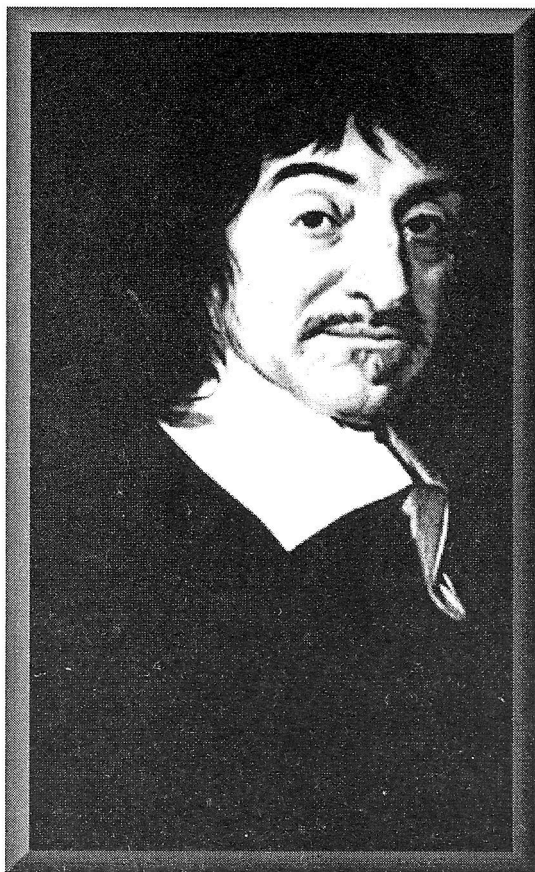
Levando em consideração esse raciocínio, podemos citar os babilônicos que construíram tabelas em argila, e para cada valor na primeira coluna existia um número na segunda, que era o resultado da multiplicação do número da primeira por uma constante. Semelhante aos babilônicos, os egípcios construíram também tabelas, na maioria das vezes em papiros, que segundo BOYER (1989) apresentavam o resultado de investigações empíricas, ou na melhor das hipóteses, generalizações que eram o resultado da indução incompleta de casos mais simples para casos mais complicados.

O método de formação dos intervalos na teoria musical árabe é essencialmente algébrico, e se faz presente antes mesmo do século X. Quando Al-Fârrâbi tentou adaptá-lo ao sistema grego e não obteve sucesso. Os árabes consideravam relações tomando como base o comprimento da

corda do som fundamental, e assim desenvolviam relações algébricas para calcular os comprimentos correspondentes aos harmônicos do som fundamental, e a música seria a representação de uma função sob forma explícita ou implícita.

Dentre os gregos, poderíamos citar a contribuição de Ptolomeu. Em sua obra *Almagesto*, desenvolveu idéias funcionais. Segundo MENDES (1994, p.12), AABOE(1984, p.20) cita que ele trabalhou na área da astronomia, e que, desenvolveu ferramentas matemáticas, entre elas a trigonometria. Ele utilizou tabelas envolvendo a função da corda do arco x , ou $\text{crd } x$, mas sem fazer referência a palavra função. E ainda entre as idéias funcionais gregas temos os *symptoms*, que eram a condição necessária para que um ponto pertencesse a uma curva. Apolônio e Arquimedes chegaram a utilizar os *symptoms*.

Durante a Idade Média, o Bispo parisiense de Lisieux Nicole Oresme(1323-1382), que segundo BOYER (1989, p. 193), em um trabalho intitulado de *Tractatus de Latitudinibus Formarum*, feito por um discípulo ou até por ele mesmo, seria o resumo de uma obra maior do próprio Oresme, *Tractatus de Potentiarum et*



René Descartes(1596-1650)

Mensurarum, onde continha uma extensão da idéia de sua “latitude de formas” para três dimensões e até uma insinuação para quatro dimensões. A Quarta dimensão seria a representação da intensidade de uma forma para cada ponto de um corpo ou volume de referência, porém não possuíam ferramentas suficientes para melhores conclusões, e essa fraqueza técnica influenciou toda a Idade Média.

No século XVI, tivemos um relativo avanço no que diz respeito à álgebra, François Viète(1540-1603) inicia os estudos baseados em parâmetros e variáveis. Denominou sua álgebra de **lógica speciosa**, e segundo MENDES(1994, p. 20) “foi Viète quem fez a distinção entre aritmética e álgebra, passando a analisar

os problemas utilizando métodos mais gerais”.

E é com Galileu Galilei(1564-1642) que surge o interesse em debater quantitativamente os axiomas, mensuráveis e que portanto poderiam ser relacionados por fórmulas. MENDES(1994, p. 21) cita que o principal interesse de Galileu era entender como os fenômenos ocorriam, com o intuito de descrever as mudanças da natureza. Segundo KLINE(1972, p. 338), citado por MENDES(1994, p. 22), foi o estudo do movimento que originou o conceito de uma função ou de uma relação entre variáveis. Porém Galileu não formalizou explicitamente a palavra função.

René Descartes(1596-1650), e Pierre de Fermat(1601-1665), magistrado em Toulouse, desenvolveram separadamente as bases teóricas da geometria analítica. E BAUMGART(1992, p. 83) afirma que Descartes chegou a definir função como qualquer potência de x , como $x^2, x^3, \dots$



Pierre de Fermat(1601-1665)

Vem o século XVIII e com ele destacam-se Isaac Newton(1642-1727) e Gottfried Wilhelm Leibniz(1646-1716). Newton direcionou suas pesquisas dentro da Física, especificamente no campo da Mecânica, e como frutos para a matemática desenvolveu os métodos infinitesimais. KLEINER(1989, p.289), citado por MENDES(1994, p. 26), acredita que a maior contribuição de Newton dentro do conceito de função foram suas descobertas a respeito de séries de potências, e é ele quem introduz o termo “variável independente”.



Gottfried Wilhelm Leibniz(1646-1716)

O problema da interpolação originou-se com o desenvolvimento de funções em polinômios, visando a suprir a necessidade na área de navegação e cartografia. ÁVILA(1995, p. 40) afirma que Briggs em 1624 foi quem iniciou essas aproximações de funções em polinômios. Porém a técnica trouxe consigo alguns problemas, pois tais aproximações

resultariam em séries e que em algumas condições resultavam em absurdo, pois até então não havia se formalizado a idéia de convergência de séries.

MENDES(1994, p. 27) destaca que James Gregory, em *Vera Circuli et Hyperbolae Quadratura* (1667), conceituou função sem utilizar a palavra propriamente dita:

“Nós chamamos uma quantidade x composta de outras quantidades $a, b, \dots$ se x resulta de $a, b, \dots$ pelas quatro operações elementares, por extração de raízes ou por qualquer outra operação imaginável.”

Leibniz nasceu em Leipzig, aos dezessete anos já era bacharel e aos vinte concluiu o doutorado em Nuremberg, em um de seus escritos datando 1694, emprega a palavra função (do latim *functio*-execução), com significado puramente geométrico. Ele a compreendia como sendo quantidades geométricas que dependiam de um ponto em uma curva.

Porém é importante ressaltar que a análise infinitesimal desenvolvida até então tinha como principal objetivo estudar as curvas geométricas. Newton e Leibniz não visavam, exatamente às funções, os problemas que deram origem ao cálculo eram geométricos e cinemáticos.

KLINE(1972, p. 340), citado por MENDES(1994, p. 28), fala ainda que Leibniz, na obra História, usou a palavra “função” para representar quantidades que dependem de uma variável.

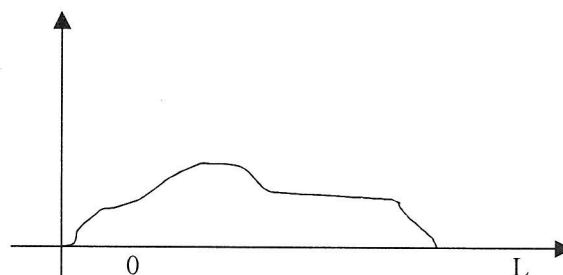
Quantidades geométricas que dependiam de um ponto em uma curva, foi como Jakob Bernoulli(1654-1705) utilizou a palavra função na revista *Acta Eruditorum*(outubro, 1694). Johann Bernoulli a definiu da seguinte maneira: “função de uma magnitude variável à quantidade composta de alguma forma por esta magnitude variável e por constantes”.

Leonhard Euler(1707-1783) nascido em Bâle na Suíça, foi aluno de Johann Bernoulli, definiu funções no sentido analítico, segundo o qual uma função não necessitava unicamente de uma expressão analítica e ele também introduziu o símbolo $f(x)$. No segundo volume de *Introduction in Analysin Infinitorum*, Euler diferenciou as funções contínuas e descontínuas, levando em consideração a lei de formação de cada função. Aquelas que fossem definidas por apenas uma expressão analítica seria classificada como contínua e caso essa lei mudasse em qualquer intervalo do domínio automaticamente se classificaria como descontínua ou mista.



E é no século XVIII, que o **Problema da Corda Vibrante** mexe com o raciocínio dos matemáticos da época e que vai influenciar na reformulação do conceito de função. O questionamento seria determinar a função que iria reger o formato de uma corda elástica, com os pontos inicial e final fixos, num

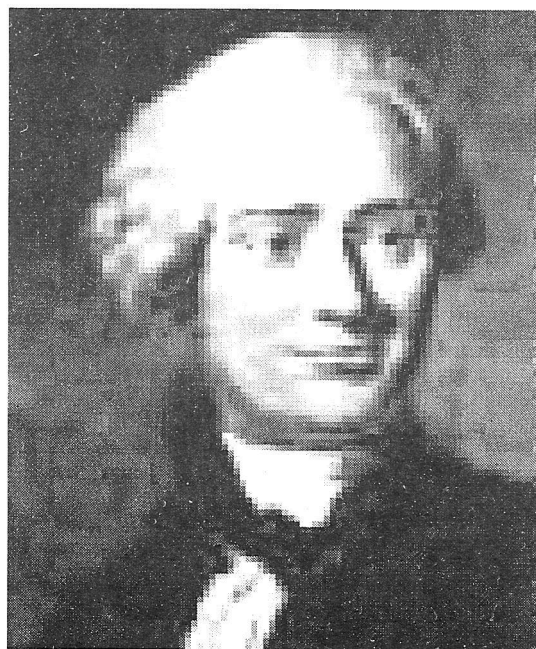
determinado tempo t .



Jean Le Rond D'Alembert(1717-1783) publicou um trabalho sobre as cordas vibrantes onde *resolveu a seguinte equação diferencial e a chamou de equação da onda*:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

onde a seria uma constante e y uma função de duas variáveis (x, t) e que representaria o deslocamento transversal do ponto x da corda no tempo t .



Jean Le Rond D'Alembert(1717-1783)

MENDES(1994, p. 33) afirma que D'Alembert utilizou as condições de contorno $y(0,t)=0$ e $y(l,t)=0$ e as condições iniciais:

$$y(x,0) = f(x)$$

$$\left. \frac{\partial y}{\partial t} \right|_{t=0} = 0$$

E encontrou como resposta uma solução geral da equação diferencial acima mencionada:

$$y(x,t) = \frac{[f(x+at) + g(x-at)]}{2}$$

Onde **f** e **g** seriam funções arbitrárias. Euler não concordou com D'Alembert e publicou em 1748 um outro trabalho relativo às cordas vibrantes. Os dois matemáticos discordavam quanto às funções que poderiam representar o formato inicial da corda.

D'Alembert defendia que somente as funções expressas por uma única expressão analítica poderiam ser consideradas, achava necessário essa restrição para que os operadores da equação diferencial dada, pudessem ser utilizados sem problemas. Euler não aceitava essa restrição e defendia que funções mais gerais deveriam ser incluídas.

Uma terceira visão sobre o problema foi dada por Daniel Bernoulli(1700-1782) em 1753, quando mostrou a seguinte solução por séries infinitas:

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \cos \frac{n\pi at}{l}$$

ÁVILA(1985, p. 18) afirma que Daniel Bernoulli baseado em um ponto de vista físico, percebeu que a corda podia vibrar de uma infinidade de maneiras diferentes, e qualquer vibração do tipo descrito por ele possuiria uma frequência particular, e que essa sim seria a forma mais geral do problema das cordas vibrantes.

Esse desenvolvimento não foi bem aceito pelos matemáticos da época. Segundo MENDES(1994, p. 36), Bernoulli não deu uma definição de função, para ele "função arbitrária" significava "formato arbitrário" da corda vibrante.

Um prêmio foi oferecido em 1787 pela Academia de São Petesburgo, para quem melhor explicasse como eram as funções arbitrárias que poderiam ser obtidas nas soluções de equações diferenciais parciais. O ganhador foi Louis Arbogast (1759-1803), que segundo MENDES (1994, p. 36) citando EDWARDS (1979, p. 303), argumentou que tais funções não poderiam ser contínuas, mas para isso ele conceituou continuidade:

(...) A lei de continuidade consiste em que uma quantidade não pode passar de um estado para o outro sem passar através de todos os estágios intermediários que são sujeitos à mesma lei (...)

(...)Esta continuidade pode ser destruída de duas formas:

A função pode mudar sua forma, quer dizer, a lei pela qual a função depende das variáveis pode mudar repentinamente. Uma curva formada pela reunião de muitas porções de curvas diferentes é deste tipo...Não é nem necessário que a função **y**

seja expressa por uma equação para um certo intervalo da variável; ela pode mudar continuamente sua forma, e alinha que a representa, ao invés de ser uma reunião de curvas regulares, pode ser tal que em cada um destes pontos ela se torne uma curva diferente; quer dizer ela pode ser inteiramente irregular e não seguir qualquer lei para qualquer intervalo mesmo pequeno.

Tal seria uma curva traçada ao acaso pelo movimento livre da mão. Estes tipos de curvas não podem ser representadas por uma nem por muitas equações algébricas ou transcendentais.



Joseph-Louis Lagrange (1736-1813)

A lei de continuidade é outra vez quebrada quando as diferentes partes de uma curva não se ligam umas as outras...Chamaremos tais curvas de curvas descontínuas, porque todas as suas partes não são contíguas, e semelhantemente, funções descontínuas(...)

Ainda a respeito do problema das cordas vibrantes, Joseph-Louis Lagrange (1736-1813), encontrou uma solução mais abrangente que a encontrada e defendida por Daniel Bernoulli. BOYER(1996, p. 338) afirma que o objetivo de Lagrange era tornar o cálculo "logicamente satisfatório".

Na obra *Théorie des Functions Analytiques* (1797), Lagrange define função assim:

"Chama-se função de uma ou de várias quantidades a toda expressão de cálculo na qual essas quantidades entrem de alguma maneira, combinadas ou não com outras quantidades cujos os valores são dados e invariáveis, enquanto que as quantidades da função podem receber todos os valores possíveis. Assim, nas funções são consideradas apenas as quantidades assumidas como variáveis e não as constantes que aparecem combinadas a elas". MENDES(1994, p. 37).

E depois aprimora o conceito na sua obra *Leçons sur le calcul des fonctions* (1806):

"Funções representavam diferentes operações que deviam ser realizadas em quantidades conhecidas para obterem-se valores de quantidades desconhecidas, e estas quantidades desconhecidas eram, propriamente, o último resultado do cálculo." MENDES(1994, p. 37).

Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830), secretário do Instituto do Egito, destaca-se na virada do século XVIII para o século XIX, com seus estudos sobre a propagação do calor. Em 1822 publica *La Théorie Analytique de la Chaleur* onde afirmou que qualquer função poderia ser expressa por uma série trigonométrica da seguinte forma:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \sin \frac{n\pi x}{l} \right]$$

Onde:

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(t) \cos \frac{n\pi t}{l} dt$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(t) \sin \frac{n\pi t}{l} dt$$



Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830),

ÁVILA(1985, p. 20) afirma que apesar de Daniel Bernoulli em 1753 já tivesse discutido tal questão de maneira mais restrita, foi com Fourier que ela se tornou realmente presente no mundo matemático.

As conclusões de Fourier não foram bem aceitas, MENDES(1994, p. 40) citando EDWARDS(1979, p. 307), onde ele (Fourier) define o termo função:

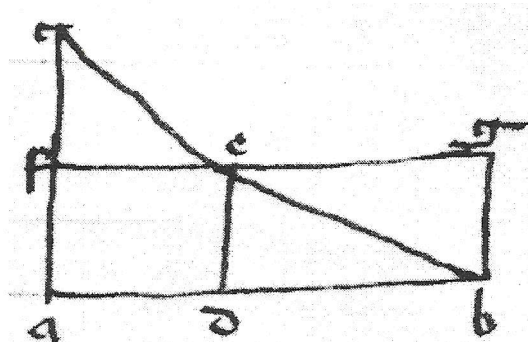
"Acima de tudo deve ser destacado que a função $f(x)$, para a qual esta prova se aplica, é inteiramente arbitrária, e não sujeita a uma lei de continuidade... Em geral, a função $f(x)$ representa uma sucessão de valores que são dados à abscissa x , e existe um número igual de ordenadas $f(x)$... Nós não supomos estas ordenadas sujeitas a uma lei comum; elas se sucedem de qualquer maneira que seja, e cada uma delas é dada como se fosse uma quantidade única." MENDES(1994, p. 40).

Mas como cita ÁVILA(1985) embora Fourier tenha pretendido haver provado essa possibilidade, seus argumentos não foram convincentes, pela utilização de procedimentos formais cuja justificação rigorosa era de todo impossível na época.

Perto do fim do século XVIII, quando muitos absurdos e contradições tinham surgidos na matemática, sentiu-se que era essencial examinar as bases da análise para dar-lhes uma fundamentação, foi uma reação ao emprego descontrolado da intuição e do formalismo do século anterior. Assim, a própria idéia de função teve que ser esclarecida e noções como a de limite, continuidade, diferenciabilidade e integrabilidade tiveram de ser cuidadosa e claramente definidas.

Um sacerdote tcheco, Bernhard Bolzano (1781-1848) é considerado pioneiro nessa formalização. Em 1817, publica *Functionlehre* onde conceitua continuidade muito próximo do conceito atual.

Bolzano também demonstrou o teorema do valor médio, hoje muito utilizado em cursos regulares de cálculos, mas que segundo LEITÃO(2000) no seu contexto original, este resultado não se referia apenas ao movimento local, isto é, a grandeza que se encontra a variar, não era necessariamente a velocidade. Os seus autores propuseram-no de uma maneira muito geral, e aplicaram-no em contextos muito diversos, por exemplo para abordar questões teológicas, analisando como variava o efeito da Graça Divina numa alma humana.



"Teorema do Valor Médio"

Em *Cours d'analyse*, Augustin Louis Cauchy(1789-1857) em 1821 definiu função:

"Quando quantidades variáveis estão ligadas entre si de tal forma que, o valor de uma delas sendo dado, pode-se determinar o valor das demais, diz-se usualmente que estas quantidades são

expressas por meio de uma delas, que toma o nome de variável independente; e as outras quantidades expressas por meio da variável independente são o que chamamos de funções dessa variável."



Augustin Louis Cauchy(1789-1857)

A definição de continuidade através de infinitésimos também foi contribuição de Cauchy. ÁVILA(1995, p. 131) afirma que o "rigor" de Cauchy também deixava muito a desejar e várias de suas demonstrações são incompletas ou incorretas.

Peter Gustav Lejune Dirichlet (1805-1859) foi um contemporâneo de Cauchy e que alcançou destaque no século XIX. Propôs uma função que ficou conhecida com o seu nome, "função de Dirichlet":

$$f(x) = \begin{cases} a, & \text{se } x \text{ racional;} \\ b, & \text{se } x \text{ irracional;} \end{cases}$$

com $a \neq b$, a e b constantes.

Baseado em algumas idéias e trabalhos de Cauchy, Dirichlet demonstrou que nem todas as funções podem ser descritas pela série de Fourier, apenas aquelas que satisfizessem alguns critérios. BOYER(1989, p. 405) cita que em 1837, Dirichlet sugeriu uma definição muito ampla de função:

“Se uma variável y está relacionada com uma variável x de tal modo que, sempre que é dado um valor numérico a x , existe uma regra segundo a qual um valor único de y fica determinado, então diz-se que y é função da variável independente x .”

Nikolái Lobatchesvsky(1792-1856), matemático russo também definiu função :

“A concepção geral exige que uma função de x seja chamada de um número que é dado para cada x e que muda gradualmente com x . o valor da função pode ser dado ou por uma expressão analítica, ou por uma condição que ofereça um meio para testar todos os números e seleccionar um deles; ou finalmente, a dependência pode existir mas permanecer desconhecida”. YOUSCHKEVITCH(1976, p. 77), citado por MENDES(1994, p. 46).

Nascido em 17 setembro de 1826, o alemão Georg Friedrich Bernhard Riemann, também deixou sua marca no século XIX. ÁVILA(1985, p. 29) acredita que os estudos de Riemann foram influenciados por Dirichlet, daí seu interesse pelas séries trigonométricas. E como essas séries trigonométricas apresentavam integrais como coeficiente, Riemann preocupou-se com o esclarecimento dos critérios de integrabilidade, surgindo aí o conceito de “integral de Riemann”.



Georg Friedrich Bernhard Riemann(1826-1866)

No final do século XIX, Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor(1845-1918), professor da Universidade de Halle, desenvolveu a teoria dos conjuntos sem a credibilidade de muitos matemáticos influentes de sua época. Porém seus estudos influenciaram e muito nas bases da análise.



Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor(1845-1918)

Karl Theodor Weierstrass (1815-1897) nascido em Ostenfeld na Alemanha, foi professor de matemática em Deutsche-Croner, desvinculou continuidade de diferenciabilidade em 1872, quando sugere uma função contínua e não diferenciável:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b^n \cos(a^n \pi x)$$

$$\text{onde } \begin{cases} a \text{ é inteiro ímpar} \\ b \in \mathbb{R} \text{ tal que } b \in]0,1[\\ ab > 1 + \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$

E ainda segundo BOYER(1989, p. 142), Weierstrass definiu função como uma série de potência juntamente com todas as que podem ser obtidas dela por prolongamento analítico.

Em Zuffi (2001) encontramos o seguinte comentário sobre a contribuição de Guiseppe Peano (1858 - 1932) ao conceito de função:

"Sua maior contribuição a definição do conceito de função, talvez esteja nos três conceitos primitivos que estabeleceu em seus fundamentos de aritmética: o zero, o conceito de número (inteiro não-negativo) e a relação de ser sucessor de, os quais, junto com seus cinco postulados, forneceram uma construção rigorosa do conjunto dos números naturais".

O nome Nicolas Bourbaki se destaca no século XX. Nome grego de um suposto autor francês, nascido em Nancy, assinou várias obras. Porém acredita-se que seria um grupo de matemáticos que resolveram ter em Nicolas Bourbaki um pseudônimo. Em *Théorie des Ensembles* conceitou função de duas maneiras:

"Sejam E e F dois conjuntos, distintos ou não. Uma relação entre uma variável x de E e uma variável y de F é dita uma relação funcional em y, ou relação funcional de E em F, se qualquer que seja x ∈ E, existe um e somente um elemento y ∈ F que esteja associados a x na relação considerada.

Dá-se o nome de função à operação que desta forma associa a todo o elemento x ∈ E o elemento y ∈ F que se encontra ligado a x na relação dada; diz-se que y é o valor da função para o elemento x, e que a função está determinada pela relação funcional considerada. Duas relações funcionais equivalentes determinam a mesma função." MENDES(1994, p. 53).

E:

"Um certo subconjunto do produto cartesiano AxB". MENDES(1994, p. 54)

Conceitos esses até hoje ainda são utilizados.

Agora, apresentaremos um quadro sinótico da evolução do conceito de função.

Autor	Ano	Contribuição
René Descartes (1596-1650)	—	Chegou a definir função como qualquer potência de x , como $x^2, x^3, \dots$
Isaac Newton (1643-1727)	—	Introduziu o termo “variável independente”.
James Gregory	1667	Na obra <i>Vera Circuli et Hyperbolae Quadratura</i> , conceituou função sem utilizar a palavra propriamente dita: “Nós chamamos uma quantidade x composta de outras quantidades $a, b, \dots$ se x resulta de $a, b, \dots$ pelas quatro operações elementares, por extração de raízes ou por qualquer outra operação imaginável.”
Gottfried Wilhelm von Leibniz (1646-1716)	1694	Empregou a palavra <i>função</i> para designar quantidades geométricas que dependiam de um ponto em uma curva. E na obra <i>História</i> usou a palavra “função” para representar quantidades que dependem de uma variável.
Jakob Bernoulli (1654-1705)	1694	Empregou a palavra função como sendo: quantidades geométricas que dependiam de um ponto em uma curva.
Johann Bernoulli	1718	Definiu da seguinte maneira: “função de uma magnitude variável à quantidade composta de alguma forma por esta magnitude variável e por constantes”.
Leonhard Euler (1707-1783)	—	Introduziu o símbolo $f(x)$

Autor	Ano	Contribuição
D'Alembert (1717-1783)	–	equação da onda: $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$
Daniel Bernoulli (1700-1782)	1753	Tentativa de resposta para o problema da corda vibrante: $y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \frac{n \pi x}{l} \cos \frac{n \pi a t}{l}$
Joseph-Louis Lagrange (1736-1813)	1797	Na obra <i>Théorie des Functions Analytiques</i> , definiu: “Chama-se função de uma ou de várias quantidades a toda expressão de cálculo na qual essas quantidades entrem de alguma maneira, combinadas ou não com outras quantidades cujos valores são dados e invariáveis, enquanto que as quantidades da função podem receber todos os valores possíveis. Assim, nas funções são consideradas apenas as quantidades assumidas como variáveis e não as constantes que aparecem combinadas a elas”.
Joseph-Louis Lagrange (1736-1813)	1806	Lecons sur le calcul des fuctions: “Funções representavam diferentes operações que deviam ser realizadas em quantidades conhecidas para obterem-se valores de quantidades desconhecidas, e estas quantidades desconhecidas eram, propriamente, o último resultado do cálculo.”
Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830)	1822	Afirmou em <i>La théorie analytique de la chaleur</i> que qualquer função poderia ser expressa por uma série trigonométrica da seguinte forma: $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos \frac{n \pi x}{l} + b_n \operatorname{sen} \frac{n \pi x}{l} \right]$

Autor	Ano	Contribuição
Benhard Bolzano (1781-1848)	1817	Publicou Functionlehre onde conceituou continuidade muito próximo do conceito atual. Demonstrou o teorema do valor médio
Augustin Louis Cauchy (1789-1857)	1821	Em Cours d'analyse definiu função: “Quando quantidades variáveis estão ligadas entre si de tal forma que, o valor de uma delas sendo dado, pode-se determinar o valor das demais, diz-se usualmente que estas quantidades são expressas por meio de uma delas, que toma o nome de variável independente; e as outras quantidades expressas por meio da variável independente são o que chamamos de funções dessa variável.” Definiu continuidade através de infinitésimos.
Peter Gustav Lejune Dirichlet (1805-1859)	—	Demonstrou que nem todas as funções podem ser descritas pela série de Fourier.
Peter Gustav Lejune Dirichlet (1805-1859)	1837	Definiu função como: “Se uma variável y está relacionada com uma variável x de tal modo que, sempre que é dado um valor numérico a x , existe uma regra segundo a qual um valor único de y fica determinado, então diz-se que y é função da variável independente x .”
Nikolái Lobatchesvsky (1792-1856)	—	Definiu função : “A concepção geral exige que uma função de x seja chamada de um número que é dado para cada x e que muda gradualmente com x . o valor da função pode ser dado ou por uma expressão analítica, ou por uma condição que ofereça um meio para testar todos os números e selecionar um deles; ou finalmente, a dependência pode existir mas permanecer desconhecida”.

Autor	Ano	Contribuição
Bernhard Riemann (1826-1866)	—	Esclareceu os critérios de integrabilidade, e deu origem ao conceito de “integral de Riemann”
Philipp Cantor (1845-1918)	—	Desenvolveu a teoria dos conjuntos
Karl Weierstrass (1815-1897)	—	Definiu função como uma série de potência juntamente com todas as que podem ser obtidas dela por prolongamento analítico.
Giuseppe Peano (1858-1932)	—	Definiu três conceitos primitivos que o zero, o conceito de número (inteiro não-negativo) e a relação de ser sucessor de, os quais, junto com seus cinco postulados, forneceram uma construção rigorosa do conjunto dos números naturais.
Nicolas Bourbaki	1968	Em <i>Théorie des Ensembles</i> conceitou função de duas maneiras: “Sejam E e F dois conjuntos, distintos ou não. Uma relação entre uma variável x de E e uma variável y de F é dita uma relação funcional em y, ou relação funcional de E em F, se qualquer que seja $x \in E$, existe um e somente um elemento $y \in F$ que esteja associados a x na relação considerada. Dá-se o nome de função à operação que desta forma associa a todo o elemento $x \in E$ o elemento $y \in F$ que se encontra ligado a x na relação dada; diz-se que y é o valor da função para o elemento x, e que a função está determinada pela relação funcional considerada. Duas relações funcionais equivalentes determinam a mesma função.” E: “Um certo subconjunto do produto cartesiano $A \times B$”.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AVILA, Geraldo. Evolução dos conceitos de função e de integral. **Revista de Matemática Universitária**, n.1, pág. 14-46, jun.. 1985.

_____. **Cálculo 2: função de uma variável**. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1995.

BAUMGART, John K. **Tópicos de história da matemática para o uso em sala de aula: Álgebra**. Tradução Hygino H. Domingues. São Paulo: Atual, 1992.

BELL, E. T. **História de las matemáticas**. Buenos Aires: Fondo de Cultura Económica, 1949.

BOYER, Carl B. **História da matemática**. Tradução Elza F. Gomide. 2. ed. São Paulo: Edgard Blucher, 1996.

_____. **História da matemática**. Tradução Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blucher, 1989.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**. Tradução Hygino H. Domingues. Campinas: UNICAMP, 1995.

IEZZI, Gelson; MURAKAMI, Carlos; MACHADO, Nilson José. **Fundamentos de matemática elementar: limites, derivadas, noções de integral**. São Paulo: Atual, 1985.

KLINE, Morris. **Mathematical thought from ancient to modern times**. New York: Oxford University Press, 1990.

LEITÃO, Henrique. Imagens. Disponível em: <<http://www.scientia.artenumérica.org/imagens.html>>. Acesso em: 18 jan. 2002.

LINTZ, Rubens Gouvêa. **Historia da matemática**. Blumenau: FURB, 1999. V. 1.

MENDES, Maria Helena Monteiro. **O conceito função: aspectos históricos e dificuldades apresentadas por alunos na transição do segundo para o terceiro grau**. Dissertação (Mestrado)- Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 1994.

RONCHI, Savério; PIOLI, Manoel F. F.; PESSA, João Luiz. **Enciclopédia ilustrada para educação básica: desenho, matemática**. Curitiba: Educacional Brasileira, 1972. V. 2

SUVOROV, I. **Curso de matemáticas superiores**. Tradução J. Vela Rodriguez. 2. ed. [S.l: S.n.], [199-].

ZUFFI, Edna Maura. Alguns aspectos do desenvolvimento histórico do conceito de função. **Revista da SBEM**, n. 9/10, 2001.