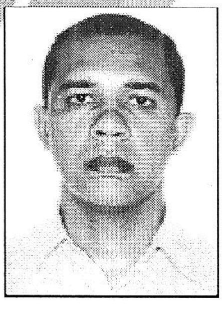
CÁLCULO DE RAÍZES DE EQUAÇÕES NÃO LINEARES: MÉTODO DAS SECANTES


(1)


(2)

Selênio Feio da Silva (1)
Graduado em Engenharia Civil - UFPA; Mestrado em Estruturas - UnB; Professor dos cursos: Engenharia Civil, Tecnologia em Processamento de Dados, Bacharelado em Ciência da Computação - UNAMA.

Pedro Franco de Sá (2)
Licenciado em Matemática - UFPA; Mestre em Matemática - UFPA; Doutor em Educação Matemática - UFRN; Professor do Curso de Matemática da UEPA e do Curso de Matemática e Engenharia Civil da UNAMA.

Rui Batista N. Junior
Aluno de Graduação do Curso de Bacharelado em Ciência da Computação - UNAMA.

CÁLCULO DE RAÍZES DE EQUAÇÕES NÃO LINEARES: MÉTODO DAS SECANTES

RESUMO:
O objetivo deste trabalho é mostrar que se pode integrar ao ensino dos métodos numéricos, programas de computador que minimizam o trabalho de professores e alunos, que desejam mostrar ou observar o desenvolver das soluções de cálculos ou comparar resultados, diminuindo assim o trabalho tedioso e árduo que alguns cálculos numéricos possam gerar em sua solução manual de acordo com a precisão desejada. A ferramenta apresentada neste artigo foi projetada para tal fim, e implementa o método das secantes, calculando a raiz da função desejada com a precisão escolhida, descrevendo apenas os resultados finais ou toda a resolução do problema passo a passo.

1. O MÉTODO DAS SECANTES

A resolução de equações é uma atividade realizada desde a antiguidade. A história da matemática registra que na Mesopotâmia já se usava técnicas algébricas e aproximações de raízes. As equações lineares e quadráticas foram resolvidas pelos Gregos através de métodos geométricos e por métodos mais aritméticos pelos Hindus e Árabes. No século *XVI* os Italianos resolveram, analiticamente, as equações cúbicas e quadráticas.

A tentativa de obter uma fórmula para resolver a equações de grau cinco, foi encerrada no século *XIX*, quando Evaristo Galois demonstrou que era impossível a dedução de uma fórmula que envolvesse somente operações elementares para as equações polinomiais de grau maior ou igual a cinco. Entre a resolução das equações cúbicas e o estabelecimento da impossibilidade de resolução geral das equações de grau maior ou igual a cinco, muitos métodos de resolução de equações ou de obtenção de uma raiz aproximada foram desenvolvidos, entre eles tem-se o método da bisseção, o método das secantes e o método das tangentes.

Esses métodos têm como condição de funcionamento a validade do Teorema de Bolzano, que consiste em diminuir cada vez mais um intervalo numérico $[a,b]$, garantindo a existência da raiz dentro deste intervalo $(f(a).f(b) < 0)$, de forma que a convergência estará garantida, dentro de uma precisão estabelecida.

Conforme (Vrahatis,et al), a vantagem dos métodos quase-Newton, no qual se enquadra o método das secantes, é que eles necessitam de apenas n avaliações de funções por iteração, diferente do método de Newton-Raphson (Charles et al, 2000) que necessita de $n^2 x\, n$ avaliações de função por iteração em um sistema $n\, x\, n$, o que quer dizer em alguns casos menos dificuldades para resolver problemas. De acordo com (QUANDT, 1996), a classe de métodos mais conhecida e bem sucedida é a dos Métodos Secantes. Também (Charles et al, 2000) explica que o método das secantes não requer nenhuma avaliação de derivadas formais como o método de Newton-Raphson, apenas uma avaliação de $f(x)$ por iteração. Também complementa que em alguns casos a ausência dessa avaliação simplifica a computação do processo. Vrahatis,Magoulas e Plagianakos descrevem o fato de os métodos quase-newtons poderem trabalhar com um intervalo de pontos sem a necessidade de a raiz da equação estar entre estes pontos, diferente dos métodos da falsa posição (Restrepo,2001), discartando a necessidade de se conhecer o intervalo onde a raiz se encontra. No entanto esta vantagem pode fazer com que os métodos quase-newton fiquem procurando por uma raiz que talvez não exista, enquanto os métodos da falsa posição certamente irão encontrar a raiz.

2. A TEORIA DO MÉTODO DAS SECANTES

O Método das Secantes consiste em aproximações lineares a $f(x)$, usando iterações que iniciam em dois pontos quaisquer x_0 e x_1 obtendo $(x_0,f(x_0))$ e $(x_1,f(x_1))$, com base nestes pontos traçamos uma reta r_1 que interceptará o eixo das abicissas em um ponto x_2, e com base neste novo ponto efetuaremos novas iterações até que o resultado esteja satisfatório às condições de parada. Formalizando estas palavras temos a equação da reta secante que passa pelos pontos $(x_K, f(x_K))$ e $(x_{K-1}, f(x_{K-1}))$:

$$y = f(x_K) + f(x - x_K)\frac{f(x_K) - f(x_{K-1})}{(x_K) - (x_{K-1})} \quad \textbf{(1)}$$

Sendo $y=0$ e fazendo $x = x_{K+1}$ obtém-se a equação do Método das Secante:

$$x_{K+1} = x_K - f(x_K)\frac{(x_K) - (x_{K-1})}{f(x_K) - f(x_{K-1})} \quad \textbf{(2)}$$

A *figura 1* descreve a convergência das retas secantes r em direção à raiz de $f(x)$, observa-se que ao serem executadas iterações de *(2)*, e ao traçar as retas secantes resultantes r_1 e r_2, se obtém os pontos x_2 e x_3, os quais já enquadram a raiz de $f(x)$. Quando é traçada a reta secante r_3, é possível observar que ela já está bastante próxima da raiz da função $f(x)$ conforme se pode observar na *figura 2*, pode-se continuar as iterações até que o grau de precisão esteja de acordo com as necessidades.

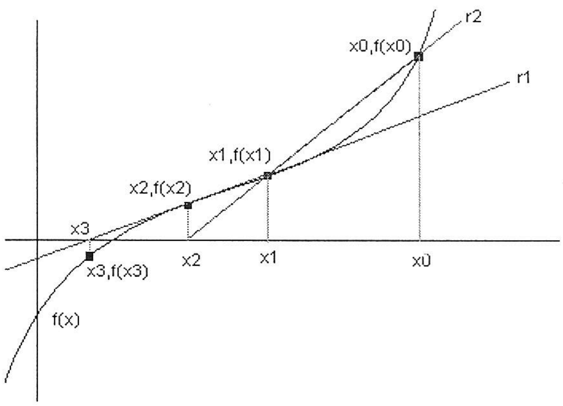


Figura 1 - Aproximação da raiz pelo método das secantes.

A razão de convergência do método é superlinear (Restrepo, 2001) de ordem *1.6818* (Charles et al, 2000) , diferente do método de Newton-Raphson que é de ordem *2*.

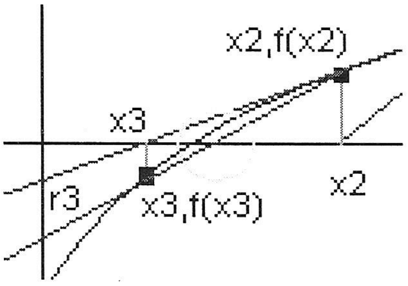


Figura 2 - Pontos x_2 e x_3 enquadrando a raiz.

3. IMPLEMENTAÇÃO E DESCRIÇÃO DO PROGRAMA

O programa implementado para resolver o Método das Secantes chama-se ***SecRoot***, ele está atualmente preparado para ler e resolver expressões algébricas que envolvam funções do tipo: exponenciais, polinomiais, logarítmicas neperianas e logarítmicas decimais. O tipo de dado numérico utilizado é do formato extended (Longo et al, 1997), definido pela linguagem de programação Pascal.O diagrama de estados do programa ***SecRoot*** é descrito na *figura 3*.

O primeiro estado é o "Coletor de parâmetros", recolhe dados digitados na interface da *figura 4* e avalia sua coerência, estes parâmetros são: equação, Intervalo inicial x_0 e x_1, precisão e mantissa. O estado seguinte é o "Formatar parâmetros para Método das Secantes", é responsável por substituir a variável da equação **(2)**, e enviar a equação resultante para o próximo estado, o estado "Calcular expressão " é o núcleo do programa, resolve a equação e retorna o valor do próximo ponto. Em seguida esse valor é passado para o estado "Avaliar condição de parada" que grava e substitui o valor do novo ponto na equação inicial e submete ao estado anterior para que esse retorne o resultado da equação, com base nesse resultado o estado corrente grava e compara com a precisão e decide se deve passar para o estado seguinte ou voltar ao estado dois. O estado "Exibir resultados" apenas lê a cadeia de dados gravados pelo estado anterior para exibir os resultados na *Memo* da interface.

Na interface, o campo "Equação" deve conter a equação numérica a ser resolvida, deve ser escrita utilizando os operadores *+,-,* e /*; além de ^ para potência. Também aceita "(" *e* ")" para ordenar a precedência de resolução. Possui as funções *LOG(X), LN(X), RAIZ(X), Pi)* e a constante de Neper *"e"*; alguns exemplos de expressões são descritos a seguir:

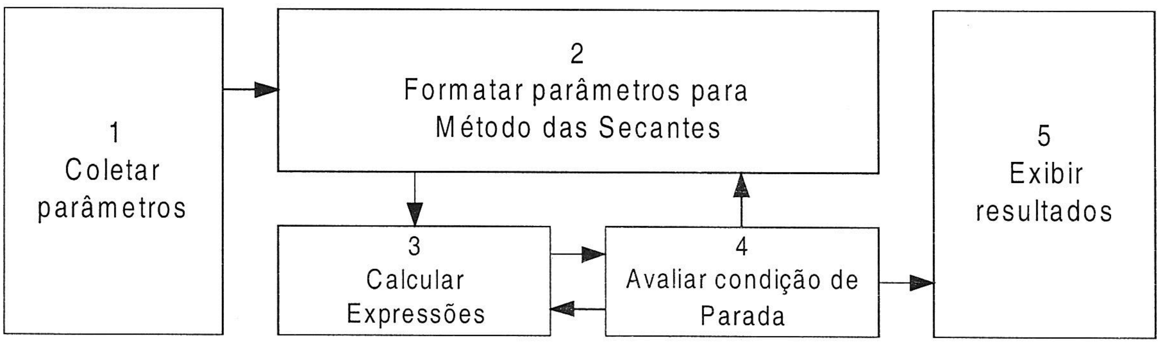


Figura 3 - Diagrama de estados do SecRoot

$$e^{x} + 2(-8+4) \equiv e\text{^}x\text{+}2\text{*}(\text{-}8\text{+}4);$$

$$(ln(x).4)/(2^{x}) \equiv (ln(x)\text{*}4)/(2\text{^}x);$$

$$10^{(x.2)} - log(x) \equiv 10\ \text{^}(x\text{*}2)\text{-}log(x).$$

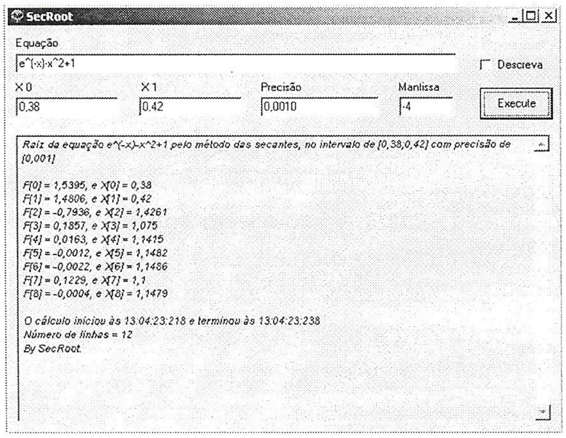


Figura 4 - Interface do SecRoot.

Os campos x_0, x_1 também podem conter expressões que resultarão no valor de sua competência. O campo precisão deve conter um numero real que descreva a precisão desejada no cálculo; o campo mantissa deve conter um número inteiro negativo que irá configurar a mantissa no decorrer da resolução da equação, esse deve ser maior ou igual a precisão pois caso contrário o programa reajustará esse valor para o valor mais adequado. Esses dois últimos campos não aceitam expressões de quaisquer natureza.

Existe em sua interface um *box* que deve ser marcado quando se deseja que o programa descreva todos os passos para se chegar a solução da equação, caso contrário o programa apenas retorna os resultados diretos . Os resultados são todos apresentados no quadro negro do programa (*Memo*), a *Memo* não é difícil de ser identificada, pelo fato de após você clicar no botão *executar*, os resultados serão exibidos nele. A formatação é a seguinte:

Descrição do problema com base nos dados coletados da interface:

Raiz da equação e^(-x)-x^2+1 = 0 pelo método das secantes, no intervalo de [0,38;0,42] com precisão de [0,001]

Tabela de resultados:

F[0] = 1,5395, e X[0] = 0,38

F[1] = 1,4806, e X[1] = 0,42

F[2] = -0,7917, e X[2] = 1,4255

F[3] = 0,1852, e X[3] = 1,0752

F[4] = 0,0161, e X[4] = 1,1416

F[5] = -0,0004, e X[5] = 1,1479

Ou descrição da resolução:

F[0] = e^(-(0,38))-(0,38)^2+1

2,7183^-0,38-0,38^2+1 [exp] = 0,6839-0,1444+1

0,6839-0,1444+1 [sum] = 1,5395

F[0] = 1,5395

X[0] = 0,38

F[1] = e^(-(0,42))-(0,42)^2+1

2,7183^-0,42-0,42^2+1 [exp] = 0,657-0,1764+1

0,657-0,1764+1 [sum] = 1,4806

F[1] = 1,4806

X[1] = 0,42

X[2] = (0,38(1,4806)-(0,42*(1,5395)))/(1,4806-(1,5395))*

*0,42*1,5395 [mul] = 0,6466*

*0,38*1,4806-0,6466 [mul] = 0,5626-0,6466*

0,5626-0,6466 [sum] = -0,084

1,4806-1,5395 [sum] = -0,0589

-0,084/-0,0589 [div] = 1,4261

F[2] = e^(-(1,4261))-(1,4261)^2+1

2,7183^-1,4261-1,4261^2+1 [exp] = 0,2402-2,0338+1

0,2402-2,0338+1 [sum] = -0,7936

F[2] = -0,7936

X[2] = 1,4261

<u>Dados sobre o cálculo coletados no decorrer de todo o processo:</u>

O cálculo iniciou às 11:52:20:702 e terminou às 11:52:20:722

Número de linhas = 9

By SecRoot.Aplicações

Com essa formatação pretende-se ser o máximo eficaz em fazer-se compreender a forma de resolução do problema, de forma que o usuário possa observar passo a passo ou apenas a tabela de respostas de acordo com sua necessidade

4. APLICAÇÕES

1ª- objetiva-se encontrar a raiz da equação $e^{-x} - x^2 + 1 = 0$, pelo método das secantes, partindo do intervalo de *[0.38, 0.42]* com precisão de *[0.01]*.

a - Resposta direta

Raiz da equação e^(-x)-x^2+1=0 pelo método das secantes, no intervalo de [0,38;0,42] com precisão de [0,01]

F[0] = 1,54, e X[0] = 0,38

F[1] = 1,481, e X[1] = 0,42

F[2] = -0,787, e X[2] = 1,424

F[3] = 0,183, e X[3] = 1,076

F[4] = 0,015, e X[4] = 1,142

F[5] = -0,003, e X[5] = 1,149

O cálculo iniciou às 13:22:25:834 e terminou às 13:22:25:844

Processador : x86 Family

Número de linhas = 9

By SecRoot.

b - Resposta descritiva.

Raiz da equação e^(-x)-x^2+1=0 pelo método das secantes, no intervalo de [0,38;0,42] com precisão de [0,01]

F[0] = e^(-(0,38))-(0,38)^2+1 *2,7183^-0,38-0,38^2+1 [exp] = 0,6839 -0,1444+1* *0,6839-0,1444+1 [sum] = 1,5395* *F[0] = 1,5395* *X[0] = 0,38* *F[1] = e^(-(0,42))-(0,42)^2+1* *2,7183^-0,42-0,42^2+1 [exp] = 0,657 -0,1764+1* *0,657-0,1764+1 [sum] = 1,4806* *F[1] = 1,4806* *X[1] = 0,42*	*X[2] = (0,38*(1,4806)-(0,42*(1,5395)))/(1,4806-(1,5395))* *0,42*1,5395 [mul] = 0,6466* *0,38*1,4806-0,6466 [mul] = 0,5626 -0,6466* *0,5626-0,6466 [sum] = -0,084* *1,4806-1,5395 [sum] = -0,0589* *-0,084/-0,0589 [div] = 1,4261*

```
F[2] = e^(-(1,4261))-(1,4261)^2+1
2,7183^-1,4261-1,4261^2+1 [exp] = 0,2402-2,0338+1
0,2402-2,0338+1 [sum] = -0,7936
F[2] = -0,7936
X[2] = 1,4261
X[3] = (0,42*(-0,7936)-(1,4261*(1,4806)))/(-0,7936-(1,4806))
1,4261*1,4806 [mul] = 2,1115
0,42*-0,7936-2,1115 [mul] = -0,3333-2,1115
-0,3333-2,1115 [sum] = -2,4448
-0,7936-1,4806 [sum] = -2,2742
-2,4448/-2,2742 [div] = 1,075
F[3] = e^(-(1,075))-(1,075)^2+1
2,7183^-1,075-1,075^2+1 [exp] = 0,3413 - 1,1556+1
0,3413-1,1556+1 [sum] = 0,1857
F[3] = 0,1857
X[3] = 1,075
X[4] = (1,4261*(0,1857)-(1,075*(-0,7936)))/(0,1857-(-0,7936))
1,075*-0,7936 [mul] = -0,8531
1,4261*0,1857--0,8531 [mul] = 0,2648 --0,8531
0,2648--0,8531 [sum] = 1,1179
0,1857--0,7936 [sum] = 0,9793
1,1179/0,9793 [div] = 1,1415
```

```
F[4] = e^(-(1,1415))-(1,1415)^2+1
2,7183^-1,1415-1,1415^2+1 [exp] = 0,3193-1,303+1
0,3193-1,303+1 [sum] = 0,0163
F[4] = 0,0163
X[4] = 1,1415
X[5] = (1,075*(0,0163)-(1,1415*(0,1857)))/(0,0163-(0,1857))
1,1415*0,1857 [mul] = 0,212
1,075*0,0163-0,212 [mul] = 0,0175-0,212
0,0175-0,212 [sum] = -0,1945
0,0163-0,1857 [sum] = -0,1694
-0,1945/-0,1694 [div] = 1,1482
F[5] = e^(-(1,1482))-(1,1482)^2+1
2,7183^-1,1482-1,1482^2+1 [exp] = 0,3172-1,3184+1
0,3172-1,3184+1 [sum] = -0,0012
F[5] = -0,0012
X[5] = 1,1482
O cálculo iniciou às 13:17:39:242 e terminou às 13:17:39:553
Processador : x86 Family
Número de linhas = 79
By SecRoot.
```

2ª- objetiva-se encontrar a raiz da equação *x.ln(x) - 1 = 0*, pelo método das secantes, partindo do intervalo de *[0.38, 0.42]* com precisão de *[0.01]*.

a - Resposta direta

*Raiz da equação x*ln(x) - 1 = 0 pelo método das secantes, no intervalo de [0,38;0,42] com precisão de [0,01]*

F[0] = -1,368, e X[0] = 0,38	*F[6] = -0,021, e X[6] = 1,75*
F[1] = -1,364, e X[1] = 0,42	*F[7] = 0,001, e X[7] = 1,764*
F[2] = 36,859, e X[2] = 14,25	*O cálculo in iciou às 13:23:16:858 e*
F[3] = -1,082, e X[3] = 0,914	*terminou às 13:23:16:868*
F[4] = -0,666, e X[4] = 1,294	*Número de linhas = 10*
F[5] = 0,221, e X[5] = 1,901	*By SecRoot.*

3ª- objetiva-se encontrar a raiz da equação $10^x + x^3 + 2 = 0$, pelo método das secantes, partindo do intervalo de *[0.38, 0.42]* com precisão de *[0.01]*.

a - Resposta direta

Raiz da equação 10^x+x^3+2 = 0 pelo método das secantes, no intervalo de [0,38;0,42] com precisão de [0,001]

F[0] = 4,4537, e X[0] = 0,38	*F[12] = -0,0036, e X[12] = -1,2718*
F[1] = 4,7044, e X[1] = 0,42	*F[13] = 0,0013, e X[13] = -1,2708*
F[2] = 2,4308, e X[2] = -0,3307	*F[14] = -0,0735, e X[14] = -1,2857*
F[3] = 0,618, e X[3] = -1,1333	*F[15] = -0,0017, e X[15] = -1,2714*
F[4] = -0,7456, e X[4] = -1,4069	*F[16] = 0,0043, e X[16] = -1,2702*
F[5] = 0,0678, e X[5] = -1,2573	*F[17] = -0,0613, e X[17] = -1,2833*
F[6] = 0,0068, e X[6] = -1,2697	*F[18] = -0,0012, e X[18] = -1,2713*
F[7] = -0,0052, e X[7] = -1,2721	*F[19] = -0,0006, e X[19] = -1,2712*
F[8] = -0,0196, e X[8] = -1,275	*O cálculo iniciou às 13:28:58:379 e*
F[9] = 0,0013, e X[9] = -1,2708	*terminou às 13:28:59:831*
F[10] = -0,0081, e X[10] = -1,2727	*Número de linhas = 23*
F[11] = -0,0276, e X[11] = -1,2766	*By SecRoot*

4ª- objetiva-se encontrar o valor da raiz quadrada de cinco $\left(\sqrt{5}\right)$, pelo método das secantes, partindo do intervalo de *[0.38, 0.42]* com precisão de *[0.01]*.

a - Resposta direta

Raiz da equação x^2-5 = 0 pelo método das secantes, no intervalo de [0,38;0,42] com precisão de [0,001]

F[0] = -4,8556, e X[0] = 0,38	F[6] = -0,1688, e X[6] = 2,198
F[1] = -4,8236, e X[1] = 0,42	F[7] = -0,0092, e X[7] = 2,234
F[2] = 36,6025, e X[2] = 6,45	F[8] = 0,0006, e X[8] = 2,2362
F[3] = -3,7409, e X[3] = 1,1221	O cálculo iniciou às 13:30:42:428 e
F[4] = -2,3882, e X[4] = 1,6161	terminou às 13:30:42:449
F[5] = 1,1916, e X[5] = 2,4883	Número de linhas = 11
	By SecRoot.

5. CONCLUSÕES

Observa-se que algumas resoluções de problemas são muito extensas, o que de certo é um trabalho desnecessário para um aluno ou professor, no entanto, um computador consegue alcançar a solução desses problemas em alguns milésimos de segundo. Não se pode afirmar que as resoluções manuais desses cálculos sejam desnecessárias para o aprendizado dos métodos numéricos, no entanto é possível enxergar a real necessidade da computação na matemática numérica, agilizar processos repetitivos. Pode-se concluir que a automação desses procedimentos vem a ser de grande importância para o estudo de caso, e também possui grande valor didático para o curso de métodos numéricos.

O programa implementado neste trabalho é apenas mais uma ferramenta entre várias outras que se propõem a solucionar o mesmo ou outros problemas da matemática numérica, seu diferencial está na característica de oferecer uma resposta descritiva da solução, o que pode ajudar a encontrar falhas nas resoluções feita por nós, humanos, ou observar detalhes do solucionar.

Acreditamos que, com isso, tenhamos dado nossa contribuição ao ensino dos métodos numéricos e que outros possam acessar este documento, encontrar erros ou dar sugestões de melhoria na forma de novos artigos, perpetuando, assim, a pesquisa científica e a evolução do ensino da matemática e de outras matérias de mesma importância.

REFERÊNCIAS

Longo, Mauricio B.; Smith, Ronaldo e Polistchuck,Daniel **Delphi 3** Dominando a ferramenta - 3. ed. Rio de Janeiro:Brasport, 1997

Charles C. Dyer e Peter S. S. **An Elementary Introduction to Scientific Computing**

(disponível por : http://pathfinder.scar.utoronto.ca/~dyer/csca57/book_P/footnode.html#foot16), Revised January 3, 2000.

Vrahatis, M.N.; Magoulas G.D. e Plagianakos V.P. **Convergence Analysis of the Quickprop Method**

QUANDT, JOANA B. O. **MINIMIZAÇÃO DE FUNÇÕES COM RESTRIÇÕES CANALIZADAS UTILIZANDO FALSAS HESSIANAS DE BANDA** (Tese apresentada para obtenção do título de Doutor em Engenharia de Produção, no Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção da Universidade Federal de Santa Catarina.) FLORIANÓPOLIS 1996 .

Restrepo, Juan M. **COMPUTER ARITHMETIC** (disponível por : http://physics.arizona.edu/~restrepo/475A/Notes/sourcea/node1.html) July, 2001